ORSAY
N^{O} d'ordre: 3508

UNIVERSITÉ de PARIS-SUD

Centre d'ORSAY

THÈSE

présentée
pour obtenir

le titre de Docteur ès Sciences

Spécialité : Mathématiques

par

Louis GOUBIN

Sujet: **Sommes d'exponentielles à coefficients multiplicatifs**

soutenue le 10 janvier 1995 devant la Commission d'examen

M. Gérald TENENBAUM, Président
M. Hedi DABOUSSI
M. Etienne FOUVRY
M. Jean-Louis NICOLAS
M. Michel RAYNAUD

Remerciements

Je tiens à exprimer ici ma gratitude aux personnes qui m'ont accompagné pendant la préparation de cette thèse au laboratoire d'arithmétique et de géométrie algébrique de l'université d'Orsay, et sans qui ce travail n'aurait pu voir le jour.

Etienne Fouvry et Hedi Daboussi m'ont initié à la théorie analytique des nombres et ont su me faire partager leur enthousiasme. Qu'ils en soient remerciés. Je suis tout particulièrement reconnaissant envers Hedi Daboussi pour avoir accepté de diriger ce travail de recherche, pour avoir bien voulu me consacrer fréquemment du temps pour me suggérer de nouvelles pistes ou apporter des corrections, et envers Etienne Fouvry pour avoir accepté d'être membre du jury.

Je tiens à remercier également Gérald Tenenbaum pour avoir suivi de manière approfondie l'évolution de ce travail, et pour avoir apporté de nombreux éclaircissements et remarques, et enfin pour avoir accepté d'être rapporteur et président du jury.

Merci aussi à Matti Jutila, dont les travaux m'ont suggéré les deux derniers chapitres. Il s'est également intéressé à ce travail, et m'a encouragé dans cette voie, et a bien voulu être rapporteur.

Ma gratitude va également à Jean-Louis Nicolas, qui s'est intéressé à ce travail et a accepté d'être rapporteur et membre du jury.

Je remercie aussi Michel Raynaud d'avoir accepté de participer au jury.

Je veux aussi dire ici combien j'ai apprécié le soutien de ceux qui ont partagé ces années d'étude, notamment Cécile Dartyge, Régis de la Bretêche et Philippe Michel, qui ont travaillé sur des sujets voisins.

Enfin, que soient profondément remerciés tous les amis et proches qui m'ont prodigué des encouragements pendant la réalisation de ce travail (je ne peux tous les citer ici, qu'ils me pardonnent), et particulièrement ma famille, dont l'affection et le soutien n'ont jamais fait défaut.

Introduction

Le travail présenté ici a pour sujet central l'étude du comportement des sommes d'exponentielles du type

$$\sum_{n\leq x} f(n)e(n\theta)$$

où f est une fonction arithmétique multiplicative. Un des nombreux intérêts de ces sommes réside dans le fait qu'elles reflètent les interactions entre l'ordre additif sur les entiers naturels (induit par l'ordre sur $\mathbf{Z}$ engendré par l'addition) et l'ordre multiplicatif (qui correspond à l'ordre lexicographique sur la suite des exposants dans la décomposition en facteurs premiers). De nombreux problèmes de théorie des nombres proviennent de ce «conflit» entre ces deux ordres: la question des nombres premiers jumeaux et la conjecture de Goldbach n'en sont que les exemples les plus célèbres.

Deux types de problèmes seront abordés. D'une part, on s'attachera à décrire le comportement des sommes d'exponentielles lorsque θ désigne un nombre irrationnel, et à obtenir des renseignements sur la classe des fonctions multiplicatives f pour lesquelles la somme d'exponentielles mise en jeu vérifie pour de telles valeurs de θ:

$$\sum_{n\leq x} f(n)e(n\theta) = o\Big(\sum_{n\leq x} f(n)\Big).$$

D'autre part, on étudiera les mêmes sommes dans la situation où θ est un nombre rationnel. Dans ce cas, on obtiendra en général un terme principal «lisse» et un terme d'erreur, que l'on s'efforcera d'écrire sous la forme la plus explicite, afin de pouvoir décrire le plus précisément son comportement asymptotique. Dans cette dernière perspective, on trouvera notamment pour les fonctions diviseurs généralisées une description du terme d'erreur sous la forme d'une série oscillante semi-convergente: on obtiendra ainsi des formules analogues à celle que Voronoï avait prouvée pour la fonction «nombre de diviseurs» ordinaire.

Le présent mémoire s'organise en trois grandes parties: la première – que l'on trouvera exposée dans le premier chapitre – concerne l'étude de sommes d'exponentielles dans le cas d'une fonction f multiplicative à valeurs dans le disque unité, et qui ne «charge» que les entiers dans grand facteur premier. La deuxième – dans le chapitre 2 – a pour objet une généralisation du théorème de Daboussi à une classe de fonctions comprenant notamment les fonctions diviseurs généralisées. Enfin, dans la troisième partie - développée dans les chapitres 3 et 4 – on obtiendra des formules de type Voronoï, ceci essentiellement pour la fonction τ_3, qui compte le nombre de façons d'écrire un entiers comme produit de trois entiers.

La première partie tire son origine d'une question de Jean-Louis Mauclaire, qui avait conjecturé que pour tout θ irrationnel,

$$\sum_{\substack{n=1\\ P(n)\leq y}}^{+\infty} \frac{e(n\theta)}{n} = o(\log y),$$

et l'avait établi pour presque tout θ. Ce problème a été résolu par Etienne Fouvry et Gérald Tenenbaum, qui ont montré le résultat plus fort suivant:

$$\lim_{y\to+\infty} \sum_{\substack{n=1\\ P(n)\leq y}}^{+\infty} \frac{e(n\theta)}{n} = \log\Big(\frac{1}{1-e(\theta)}\Big) + m(\theta),$$

où $m(\theta)$ est une fonction traduisant un phénomène inattendu: elle est nulle seulement lorsque θ est irrationnel ou lorsque θ est un rationnel dont le dénominateur possède au moins deux facteurs premiers distincts.

On s'intéressera au problème plus général du comportement de la somme:

$$\frac{1}{\log y} \sum_{\substack{n=1\\ P(n)\leq y}}^{+\infty} \frac{e(n\theta)}{n} f(n)$$

dans le cas où f est multiplicative, à valeurs dans le disque unité. En utilisant un critère de Halász faisant intervenir les caractères de Dirichlet, on donnera des conditions suffisantes pour que la limite soit nulle quand y tend vers l'infini. Le cas où θ est irrationnel sera traité comme une conséquence du théorème de Daboussi. Dans le cas où θ est rationnel, on obtiendra explicitement la limite de la somme, en utilisant une méthode due à Hubert Delange. A titre d'exemple, on verra que cette limite est toujours nulle lorsque f est la fonction de Möbius. On s'intéressera ensuite à la série

$$\sum_{\substack{n=1\\ P(n)\leq y}}^{+\infty} \frac{e(n\theta)}{n} f(n)$$

elle-même, dans le cas particulier où $f = 1$ ou $f = \mu$. En s'appuyant sur les propriétés des fonctions L de Dirichlet, on retrouvera de manière élémentaire le résultat de Fouvry et Tenenbaum, ainsi qu'un résultat similaire pour la fonction de Möbius.

La deuxième partie de cette thèse vise à obtenir une généralisation du théorème de Daboussi, selon lequel toute fonction f multiplicative et à valeurs dans le disque unité vérifie pour θ irrationnel:

$$\sum_{n\leq x} f(n)e(n\theta) = o(x)$$

lorsque x tend vers l'infini. On cherchera ainsi à décrire plus précisément la classe $\mathcal{D}$ des fonctions multiplicatives pour lesquelles on a, pour tout θ irrationnel:

$$\sum_{n\leq x} f(n)e(n\theta) = o\Big(\sum_{n\leq x} f(n)\Big).$$

On sait d'après S. Chowla que la fonction «nombre de diviseurs» appartient à $\mathcal{D}$. C'est également vrai des fonctions y^Ω (où $\Omega(n)$ désigne le nombre de facteurs premiers de n, comptés avec multiplicité) lorsque $0 < y < 2$, comme l'ont montré Dupain, Hall et Tenenbaum.

A partir du théorème de Montgomery et Vaughan – qui donne une version explicite du théorème de Daboussi – et d'une analyse de Fourier de la manière dont θ est approché par les rationnels, on montrera de manière générale que la classe $\mathcal{D}$ est «stable» par convolution par des fonctions dont le comportement sur les nombres premiers est proche de celui de la fonction 1. Grâce à cet outil, on obtiendra une description d'une sous-classe de $\mathcal{D}$, qui contient les fonctions y^ω et d_y pour $y > 0$, et y^Ω pour $0 < y < 2$. Enfin on montrera que la fonction 2^Ω n'est pas dans $\mathcal{D}$, ce qui confirme la nécessité de la restriction $0 < y < 2$ mentionnée précédemment.

Après s'être restreint au cas où θ est irrationnel, on se consacrera dans la troisième partie exclusivement au cas où θ est rationnel. On s'intéressera plus particulièrement au cas de la fonction τ_3, pour laquelle on cherchera à obtenir une formule dite «de Voronoï», qui généralise la célèbre formule sommatoire de Poisson. Ce type d'approche a été utilisé par Matti Jutila, qui a obtenu une telle formule pour les sommes d'exponentielles liées à la fonction τ_2, ce qui lui a permis – entre autres – de redémontrer la majoration suivante:

$$\int_T^{T+T^{\frac{2}{3}}} \Big|\zeta\Big(\frac{1}{2}+it\Big)\Big|^4 dt \ll_\varepsilon T^{\frac{2}{3}+\varepsilon},$$

qu'Iwaniec avait prouvée en utilisant des résultats de Kuznetsov sur les moyennes de sommes de Kloosterman. Afin d'obtenir des résultats analogues pour d'autres types de séries de Dirichlet, il est naturel d'essayer de généraliser la formule de sommation aux fonctions τ_l pour $l \geq 3$.

On commencera par obtenir dans le troisième chapitre une version «tronquée» de la formule de Voronoï pour la somme

$$D\Big(x,\frac{h}{k}\Big) = \sum_{n\leq x} \tau_3(n) e\Big(\frac{nh}{k}\Big),$$

qui généralise un résultat de F.V. Atkinson (qui traite le cas où $k=1$). L'écriture de la série de Dirichlet associée en termes de fonctions zêta de Hurwitz permet d'obtenir une équation fonctionnelle où apparaissent des sommes analogues à celles de Kloosterman. Les résultats de Weil permettent alors de majorer ces sommes. L'utilisation de la formule de Perron fait intervenir des transformées de fonctions de Bessel, qu'on estimera à l'aide d'une méthode de type «phase stationnaire».

Le dernier chapitre a pour objectif d'obtenir une version complète de la formule de Voronoï pour la somme $D\big(x,\frac{h}{k}\big)$. En utilisant une somme «duale», pour laquelle on dispose également d'une formule de Voronoï, on verra que la méthode donne le résultat voulu, à condition toutefois d'ajouter un poids $(x-n)^\varepsilon$ dans la somme, où ε est aussi petit que l'on veut. On montrera ensuite, en utilisant la méthode de Van der Corput, que l'on peut majorer le terme d'erreur de $D\big(x,\frac{h}{k}\big)$ par $x^{\frac{37}{75}+\varepsilon}k^{\frac{21}{25}}$ pour k assez petit. Lorsque $k \leq x^{\frac{1}{51}}$, cette majoration est meilleure que celle que l'on peut tirer de l'utilisation du théorème classique de Montgomery sur les moyennes de puissance quatrièmes de fonctions L de Dirichlet.

Enfin, on s'intéressera aux conséquences de l'étude de $D\big(x,\frac{h}{k}\big)$ sur le problème de $\tau_3(n)$ dans les progressions arithmétiques. L'idée d'utiliser les caractères additifs dans un tel contexte – au lieu des caractères multiplicatifs habituellement employés – est due à R.A. Smith. Elle permet de ramener le problème à une majoration directe de sommes de Kloosterman, au lieu d'une majoration de caractères de Dirichlet dans des petits intervalles, qui nécessite de faire appel aux estimations de Burgess.

Dans cette direction, on montrera une formule de Voronoï complète pour la somme

$$\sum_{\substack{n\leq x\\ n\equiv a \bmod q}} \tau_3(n),$$

où a et q sont deux entiers premiers entre eux, et on retrouvera le fait – connu depuis Selberg et redémontré ensuite par Smith – que le développement asymptotique «naturel» est valable uniformément pour $k \leq x^{\frac{1}{2}-\varepsilon}$. Ce dernier résultat repose également sur les travaux de Deligne, qui permettent d'obtenir de bonnes majorations pour les sommes de Kloosterman généralisées.

Table des matières

1 Sommes d'exponentielles à coefficients multiplicatifs et entiers sans grand facteur premier **11**

1. Introduction 11
2. Le cas où θ est irrationnel 14
3. Le cas où θ est rationnel 15
   a) On suppose $\forall \chi \bmod q$, $\sum_p \frac{1-\Re e f(p)\chi(p)}{p} = +\infty$. 17
   b) On suppose $\exists \chi \bmod q$, $\sum_p \frac{1-\Re e f(p)\chi(p)}{p} < +\infty$. 18
4. Le cas $f = \mathbf{1}$ 20
   a) Transformation de la somme 20
   b) Contribution des caractères principaux 22
   c) Contribution des caractères non principaux 24
   d) Conclusion 26
5. Le cas $f = \mu$ 26

2 Sommes d'exponentielles et principe de l'hyperbole **31**

1. Introduction 31
2. Résultats 33
3. Démonstration du théorème 1 36
   a) Cas où $\sum_{m=1}^{+\infty} \frac{f(m)}{m} < +\infty$ 36
   b) Cas où $\sum_{m=1}^{+\infty} \frac{f(m)}{m} = +\infty$ 37
4. Démonstration du corollaire 1 38
5. Démonstration du théorème 2 39
   a) Dans le cas $1 \leq y < 2$ 39
   b) Dans le cas $0 < y < 1$ 41
   c) Dans le cas général 41
6. Démonstration du corollaire 4 43
7. Démonstration du théorème 3 43
   a) Identités de convolution 43
   b) Ordres moyens 44
   c) Minoration de la somme d'exponentielles 46
   d) Étude de $M(x,y,\theta)$ 48
   e) Conclusion 49

3 Formule de Voronoï tronquée pour τ_3 **51**

1. Introduction 51
   a) Formules de sommation de Voronoï 51
   b) Sommes d'exponentielles 52
   c) Résultats 53

d) Notations . . . 54
2. Etude de la série de Dirichlet . . . 55
a) La fonction zêta d'Hurwitz . . . 56
b) Prolongement analytique de E . . . 56
c) Equation fonctionnelle pour E . . . 57
d) Etude de $E\big(s,\frac{h}{k}\big)$ au voisinage de $s=1$ . . . 59
3. Utilisation des sommes de Kloosterman . . . 69
a) La majoration de Weil . . . 69
b) Majoration de $K_{b,k}(\alpha,\beta,\gamma)$ . . . 69
c) Majoration de $E\big(0,\frac{h}{k}\big)$ . . . 72
4. Quelques propriétés des fonctions spéciales . . . 74
a) La fonction gamma d'Euler . . . 74
b) Fonctions de Bessel . . . 76
c) Transformées de Mellin classiques . . . 77
5. Sommes liées à τ_3 . . . 79
6. Transformation de la somme . . . 82
7. Estimation des termes d'erreur . . . 85
a) Troncature de la série . . . 85
b) Transformation des intégrales . . . 88
8. Estimation du terme principal . . . 91
a) Calcul de $I(X)$ et $J(X)$ . . . 91
b) Comportement asymptotique de $I(X)$ et $J(X)$ . . . 92
9. La formule de Voronoï tronquée . . . 96

4 Formule de Voronoï pour τ_3 - Applications **101**
1. Le cas où $a=2+\varepsilon$ $(\varepsilon>0)$ . . . 101
2. Passage au cas $a=1+\varepsilon$ . . . 105
a) Dérivation des intégrales $I_a(X)$ et $J_a(X)$ . . . 105
b) Développement asymptotique de $I_a(X)$ et $J_a(X)$ . . . 106
c) Dérivation des termes principaux . . . 109
d) Le cas $a=1+\varepsilon$ . . . 110
3. Le cas $a=\varepsilon$ . . . 111
a) Une somme duale de $D_a\big(x,\frac{h}{k}\big)$ . . . 111
b) Majoration de $\Phi_1\big(x,\frac{b}{k}\big)$ . . . 115
c) Une formule de sommation par parties . . . 116
d) Application au cas $a=\varepsilon$ . . . 116
4. Autre expression de la formule de Voronoï . . . 118
5. Les «petites valeurs» de k pour $\Delta_0\big(x,\frac{h}{k}\big)$ . . . 119
a) Position du problème . . . 119
b) Utilisation de la méthode de Van der Corput . . . 120
6. Cas de τ_3 dans les progressions arithmétiques . . . 123
a) Formule de Voronoï . . . 123
b) Majoration de $\Delta_0(x;c,k)$ . . . 126

Chapitre 1

Sommes d'exponentielles à coefficients multiplicatifs et entiers sans grand facteur premier

à paraître dans la revue
Acta Mathematica Hungarica
1995, numéro 1-2

1. Introduction

En utilisant des résultats sur la répartition dans les progressions arithmétiques des entiers ayant de petits facteurs premiers, E. Fouvry et G. Tenenbaum ([3]) ont montré le résultat suivant:

Théorème A. (Fouvry, Tenenbaum)

Soit $\theta \in]0,1[$. *Posons* $m(\theta) := \begin{cases} \frac{\Lambda(q)}{\phi(q)} & si\ \theta = \frac{a}{q},\ avec\ (a,q)=1 \\ 0 & si\ \theta \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{Q} \end{cases}$

Alors on a:

$$\lim_{y\to+\infty} \sum_{\substack{n=1 \\ P(n)\leq y}}^{+\infty} \frac{e(n\theta)}{n} = \log(\frac{1}{1-e(\theta)}) + m(\theta) \tag{1}$$

où $P(n)$ désigne le plus grand facteur premier de n (avec la convention $P(1)=1$).

Cela répond à une question posée par Mauclaire, qui avait conjecturé que:

$$\forall \theta \in]0,1[,\ \lim_{y\to+\infty} \frac{1}{\log y} \sum_{\substack{n=1 \\ P(n)\leq y}}^{+\infty} \frac{e(n\theta)}{n} = 0 \tag{2}$$

et l'avait établi pour presque tout θ (cf [6], page 36).

Nous allons nous intéresser plus généralement au comportement quand y tend vers $+\infty$ de

$$\frac{1}{\log y} \sum_{\substack{n=1 \\ P(n)\leq y}}^{+\infty} \frac{e(n\theta)}{n} f(n)$$

lorsque f est une fonction multiplicative à valeurs dans le disque unité.

Dans le cas où θ est irrationnel, on obtient le résultat suivant:

Théorème 1. *Soit $\theta \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}$ et f multiplicative à valeurs dans le disque unité.*

Alors: $\lim_{y\to+\infty} \frac{1}{\log y} \sum_{\substack{n=1\\P(n)\le y}}^{+\infty} \frac{e(n\theta)}{n} f(n) = 0.$

Pour θ rationnel on obtient deux types de résultats selon le comportement des séries $\sum_p \frac{1-\Re e f(p)\chi(p)}{p}$, où χ désigne un caractère de Dirichlet. C'est Halász qui le premier a mis en évidence cette distinction (cf [4] ou [2]).

Théorème 2. *Soit f une fonction multiplicative à valeurs dans le disque unité.*
Soit $\theta = \frac{a}{q}$ avec $(a,q) = 1$.
On suppose: $\forall \chi \bmod q$, $\sum_p \frac{1-\Re e f(p)\chi(p)}{p} = +\infty$.

Alors: $\lim_{y\to+\infty} \frac{1}{\log y} \sum_{\substack{n=1\\P(n)\le y}}^{+\infty} \frac{e(n\theta)}{n} f(n) = 0.$

Théorème 3. *Soit f une fonction multiplicative à valeurs dans le disque unité.*
Soit $\theta = \frac{a}{q}$ avec $(a,q) = 1$.
On suppose: $\exists \chi \bmod q$, $\sum_p \frac{1-\Re e f(p)\chi(p)}{p} < +\infty$.
Soit $\chi^* \bmod m^*$ le caractère primitif équivalent à χ.
Alors on a: $\frac{1}{\log y} \sum_{\substack{n=1\\P(n)\le y}}^{+\infty} \frac{e(n\theta)}{n} f(n) = e^{\gamma}\chi^*(a)K(q)\exp(iA(y)) + o(1),$

avec $A(y) := \sum_{p<y} \frac{\Im m \chi^*(p) f(p)}{p}$

et $K(q) := \tau(\overline{\chi^*}) \sum_{m^*|m|q} \{\frac{1}{m}\mu(\frac{m}{m^*})\overline{\chi^*(\frac{m}{m^*}\prod_{\substack{p|\frac{q}{m}\\p\nmid m}} p^{v_p(\frac{q}{m})})} \exp(-i\sum_{\substack{p|m\\p\nmid m^*}} \frac{1}{p}\Im m\chi^*(p)f(p))$

$$\prod_{\substack{p|\frac{q}{m}\\p|m}} \frac{f(p^{v_p(\frac{q}{m})})}{p^{v_p(\frac{q}{m})}} \prod_{p\nmid m}(1-\frac{1}{p}) \sum_{r=v_p(\frac{q}{m})}^{+\infty} \frac{\chi^*(p^r)f(p^r)}{p^r} \exp(-\frac{i}{p}\Im m\chi^*(p)f(p))\}.$$

Or, pour une fonction multiplicative à valeurs dans le disque unité, une condition suffisante pour avoir $\forall\chi$, $\sum_p \frac{1-\Re e f(p)\chi(p)}{p} = +\infty$ est (cf par exemple [2]):

$$\exists \rho \neq 1, \quad \sum_{\substack{p<x\\f(p)\neq\rho}} \frac{1}{p} = o(\log\log x).$$

On obtient ainsi comme conséquence des théorèmes 1 et 2:

Corollaire 1. *Soit f une fonction multiplicative à valeurs dans le disque unité.*
On suppose que $\exists \rho \neq 1$, $\sum_{\substack{p\le x\\f(p)\neq\rho}} \frac{1}{p} = o(\log\log x)$

Alors $\forall \theta \in \mathbf{R}$, $\lim_{y\to\infty} \frac{1}{\log y} \sum_{\substack{n=1\\P(n)\le y}}^{+\infty} \frac{e(n\theta)}{n} f(n) = 0.$

On peut appliquer ceci aux fonctions de Möbius et de Liouville:

Corollaire 2. *Pour tout $\theta \in \mathbf{R}$, on a:* $\lim_{y\to\infty} \frac{1}{\log y} \sum_{\substack{n=1\\P(n)<y}}^{+\infty} \frac{e(n\theta)}{n}\mu(n) = 0$

$$\text{et } \lim_{y\to\infty} \frac{1}{\log y} \sum_{\substack{n=1\\P(n)\le y}}^{+\infty} \frac{e(n\theta)}{n}\lambda(n) = 0.$$

Lorsque f est réelle et vérifie $\sum_p \frac{1-f(p)}{p} < +\infty$, on obtient, en appliquant le théorème 3 avec $\chi = \mathbf{1}$, $m^* = 1$, $A \equiv 0$:

Corollaire 3. *Soit f une fonction multiplicative à valeurs dans $[-1,1]$.*
Soit $\theta = \frac{a}{q}$, avec $(a,q) = 1$. On suppose $\sum_p \frac{1-f(p)}{p} < +\infty$

$$\textit{Alors: } \frac{1}{\log y} \sum_{\substack{n=1 \\ P(n)<y}}^{+\infty} \frac{e(n\theta)}{n} f(n) = e^\gamma K(q) + o(1) \quad (y \to +\infty),$$

$$\textit{avec } K(q) := \sum_{m|q} \frac{\mu(m)}{m} \prod_{\substack{p|m \\ p\nmid \frac{q}{m}}} \frac{f(p^{v_p(\frac{q}{m})})}{p^{v_p(\frac{q}{m})}} \prod_{p\nmid m} (1-\tfrac{1}{p}) \sum_{r=v_p(\frac{q}{m})}^{+\infty} \frac{f(p^r)}{p^r}.$$

On peut appliquer ce résultat par exemple aux fonctions $f(n) = 1$, ce qui (avec le théorème 1) redonne (2) ($K(q)$ est nul dans ce cas), $f(n) = \frac{\phi(n)}{n}$ ou $f(n) = \mu^2(n)$. On note id et η les fonctions multiplicatives définies respectivement par $id(n) = n$ et $\eta(n) = \begin{cases} 1 & \text{si } n = 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$ (η est l'élément neutre pour la convolution de Dirichlet).

Corollaire 4. *Soit $\theta = \frac{a}{q}$, avec $(a,q) = 1$. Alors on a ($y \to +\infty$):*

$$\frac{1}{\log y} \sum_{\substack{n=1 \\ P(n)<y}}^{+\infty} \frac{e(n\theta)}{n} = e^\gamma \eta(q) + o(1),$$

$$\frac{1}{\log y} \sum_{\substack{n=1 \\ P(n)\le y}}^{+\infty} \frac{e(n\theta)}{n} \frac{\phi(n)}{n} = \frac{6e^\gamma \mu(q)}{\pi^2 q \phi(q)} \prod_{p|q} (1+\tfrac{1}{p})^{-1} + o(1),$$

$$\frac{1}{\log y} \sum_{\substack{n=1 \\ P(n)\le y}}^{+\infty} \frac{e(n\theta)}{n} \mu^2(n) = \frac{6e^\gamma}{\pi^2 q} \prod_{p|q} (1+\tfrac{1}{p})^{-1} \sum_{m|q} \frac{m\mu(m)}{\phi(m)} \mu^2(\tfrac{q}{m}) + o(1).$$

Preuve :

- Pour $f = \mathbf{1}$, on a $K(q) = \sum_{m|q} \frac{\mu(m)}{m} \prod_{\substack{p|\frac{q}{m} \\ p|m}} p^{-v_p(\frac{q}{m})} \prod_{p\nmid m} (1-\frac{1}{p}) \frac{1}{p^{v_p(\frac{q}{m})}} \frac{1}{1-\frac{1}{p}}$
$$= \sum_{m|q} \frac{\mu(m)}{m} \prod_{p|\frac{q}{m}} p^{-v_p(\frac{q}{m})}$$
$$= \tfrac{1}{q} \sum_{m|q} \mu(m) = \eta(q).$$

- Pour $f(n) = \frac{\phi(n)}{n}$, on a:

$$K(q) = \sum_{m|q} \frac{\mu(m)}{m} \prod_{\substack{p|\frac{q}{m} \\ p|m}} (1-\tfrac{1}{p}) p^{-v_p(\frac{q}{m})} \prod_{\substack{p\nmid m \\ p|\frac{q}{m}}} (1-\tfrac{1}{p}) \sum_{r=v_p(\frac{q}{m})}^{+\infty} \frac{1-\frac{1}{p}}{p^r}$$
$$\times \prod_{\substack{p\nmid m \\ p\nmid \frac{q}{m}}} (1-\tfrac{1}{p})(1 + \sum_{r=1}^{+\infty} \frac{1-\frac{1}{p}}{p^r})$$
$$= \sum_{m|q} \frac{\mu(m)}{m} \prod_{p|\frac{q}{m}} (1-\tfrac{1}{p}) \prod_{p|\frac{q}{m}} p^{-v_p(\frac{q}{m})} \prod_{\substack{p\nmid m \\ p\nmid \frac{q}{m}}} (1-\tfrac{1}{p^2}),$$

avec $\prod_{\substack{p\nmid m \\ p\nmid \frac{q}{m}}} (1-\frac{1}{p^2}) = \prod_p (1-\frac{1}{p^2}) \prod_{p|q} (1-\frac{1}{p})^{-1} \prod_{p|q} (1+\frac{1}{p})^1 = \frac{6q}{\pi^2 \phi(q)} \prod_{p|q} (1+\frac{1}{p})^{-1}.$

Donc $K(q) = \sum_{m|q} \frac{\mu(m)}{m} \frac{\phi(\frac{q}{m})}{\frac{q}{m}} \frac{m}{q} \frac{6q}{\pi^2\phi(q)} \prod_{p|q} (1+\frac{1}{p})^{-1}$
$$= \frac{6}{\pi^2 \phi(q)} \prod_{p|q} (1+\tfrac{1}{p})^{-1} \sum_{m|q} \frac{\phi(m)}{m} \mu(\tfrac{q}{m})$$
$$= \frac{6\mu(q)}{\pi^2 q \phi(q)} \prod_{p|q} (1+\tfrac{1}{p})^{-1},$$

car $\phi * \mathbf{1} = id \Rightarrow \phi = \mu * id \Rightarrow \frac{\phi}{id} * \mu = \frac{\mu}{id} * \mathbf{1} * \mu = \frac{\mu}{id}$.

– Pour $f=\mu^2$, seuls les m tels que $\frac{q}{m}$ est sans facteur carré interviennent dans $K(q)$.
En effet, si on suppose $p^2|\frac{q}{m}$, suivant que $p|m$ ou $p\nmid m$, la contribution de m dans $K(q)$ contient le facteur $f(p^{v_p(\frac{q}{m})})$ ou le facteur $\sum\limits_{r=v_p(\frac{q}{m})}^{+\infty}\frac{f(p^r)}{p^r}$, qui sont tous les deux nuls.
Donc $K(q)=\sum\limits_{m|q}\mu^2(\frac{q}{m})\frac{\mu(m)}{m}(\prod\limits_{\substack{p|m\\ p|\frac{q}{m}}}p)^{-1}\prod\limits_{\substack{p\nmid m\\ p|\frac{q}{m}}}(1-\frac{1}{p})\frac{1}{p}\prod\limits_{\substack{p\nmid m\\ p\nmid\frac{q}{m}}}(1-\frac{1}{p^2})$
$=\sum\limits_{m|q}\mu^2(\frac{q}{m})\frac{\mu(m)}{m}\frac{m}{q}\frac{6q}{\pi^2\phi(q)}\prod\limits_{\substack{p\nmid m\\ p|\frac{q}{m}}}(1-\frac{1}{p})\prod\limits_{p|q}(1+\frac{1}{p})^{-1}$
avec $\prod\limits_{\substack{p\nmid m\\ p|\frac{q}{m}}}(1-\frac{1}{p})=\frac{\phi(q)}{q}\frac{m}{\phi(m)}$
d'où $K(q)=\frac{6}{\pi^2 q}\prod\limits_{p|q}(1+\frac{1}{p})^{-1}\sum\limits_{m|q}\frac{m\mu(m)}{\phi(m)}\mu^2(\frac{q}{m})$.

En fait, en utilisant les propriétés élémentaires des fonctions L, on peut retrouver (1) dans le cas rationnel, avec en outre une indication de la vitesse de convergence:

Théorème 4. *Soit $\theta=\frac{a}{q}$ avec $(a,q)=1$ et $q>1$. Soit $\varepsilon>0$ et $K>0$.*
Dans le domaine $q^{\frac{1}{2}+\varepsilon}\log q\le K\log y$, on a uniformément:

$$\sum_{\substack{n=1\\ P(n)\le y}}^{+\infty}\frac{e(n\theta)}{n}=\log\Big(\frac{1}{1-e(\theta)}\Big)+\frac{\Lambda(q)}{\phi(q)}+\mathcal{O}_{K,\varepsilon}\Big(\frac{q\log q}{\log y}\Big).$$

De même on obtient pour μ un résultat plus précis que celui du corollaire 2:

Théorème 5. *Soit $\theta=\frac{a}{q}$ avec $(a,q)=1$ et $q>1$. Soit $\varepsilon>0$ et $K>0$.*
Dans le domaine $q^{\frac{1}{2}+\varepsilon}\log q\le K\log y$, on a uniformément:

$$\sum_{\substack{n=1\\ P(n)\le y}}^{+\infty}\frac{e(n\theta)}{n}\mu(n)=\frac{1}{\phi(q)}\sum_{b=1}^{q}e\Big(\frac{ab}{q}\Big)\sum_{\chi \bmod q}\frac{\overline{\chi}(b)}{L(1,\chi)}+\mathcal{O}_{K,\varepsilon}\Big(\frac{q\log q}{\log y}\Big).$$

Comme me l'a signalé G. Tenenbaum ([8]), la méthode utilisée dans [3] permet d'obtenir un terme d'erreur en $\mathcal{O}\big(\exp^{-\lfloor\sqrt{\log y}\rfloor}\big)$, uniformément pour $y\ge\exp\big(q^{\frac{1}{2}+\varepsilon}\big)$, ce qui est beaucoup plus précis que le résultat obtenu dans le théorème 4.

2. Le cas où θ est irrationnel

On utilise le théorème suivant (cf [1]), dû à H.Daboussi (Montgomery et Vaughan en ont donné ensuite une version effective dans [7]):

Théorème B. (Daboussi) *Soit $\theta\in\mathbf{R}\setminus\mathbf{Q}$. Alors on a, uniformément pour g multiplicative à valeurs dans le disque unité:*
$$\sum_{n\le x}g(n)e(n\theta)=o(x)\qquad(x\to+\infty)$$

On aura besoin également de la majoration classique suivante, dont on peut trouver la démonstration par exemple dans [9] (théorème 1, page 396). Elle repose sur la méthode de Rankin (cf [5], lemme 4.1, page 131).

Lemme 1. $\psi(x,y):=\sum\limits_{\substack{n\le x\\ P(n)\le y}}1\ll x\exp\Big(-\frac{\log x}{2\log y}\Big)$

Démonstration du théorème 1 :

– En sommant par parties, on obtient:

$\sum_{\substack{n\le N\\ P(n)\le y}} \frac{e(n\theta)}{n} f(n) = \frac{1}{N} \sum_{\substack{n\le N\\ P(n)\le y}} f(n)e(n\theta) + \int_1^N \frac{dx}{x^2} \sum_{\substack{n\le x\\ P(n)\le y}} f(n)e(n\theta),$

Or, d'après le lemme 1, on a:

$|\sum_{\substack{n\le N\\ P(n)\le y}} f(n)e(n\theta)| \le \psi(N,y) \ll N\exp(-\frac{\log N}{2\log y}) = o(N),$

et $\frac{1}{x^2} \sum_{\substack{n\le x\\ P(n)\le y}} f(n)e(n\theta) \ll \frac{1}{x}\exp(-\frac{\log x}{2\log y}).$

Donc $\sum_{\substack{n=1\\ P(n)\le y}}^{+\infty} \frac{e(n\theta)}{n} f(n) = \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2} \sum_{\substack{n\le x\\ P(n)\le y}} f(n)e(n\theta).$

– Posons pour $y \ge 2$, $f_y(n) = \begin{cases} f(n) & \text{si } P(n)\le y \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

f_y est encore multiplicative à valeurs dans le disque unité.

Soit $\varepsilon > 0$. Le lemme 1 fournit une constante $A > 0$ telle que

$\forall x \ge 2, \forall y \ge 2, \psi(x,y) \le Ax\exp(-\frac{\log x}{2\log y})$.

Prenons $\varepsilon' > 0$ assez petit pour avoir $2(\varepsilon' A + \varepsilon' \log\frac{1}{\varepsilon'}) < \varepsilon$.

D'après le théorème B, $\exists x_0(\varepsilon'), \forall x \ge x_0, \forall y \ge 2, |\frac{1}{x}\sum_{n\le x} f_y(n)e(n\theta)| < \varepsilon'$.

$\sum_{\substack{n=1\\ P(n)\le y}}^{+\infty} \frac{e(n\theta)}{n} f(n) = \int_1^{y^k} \frac{dx}{x^2} \sum_{n\le x} f_y(n)e(n\theta) + \int_{y^k}^{+\infty} \frac{dx}{x^2} \sum_{n\le x} f_y(n)e(n\theta).$

– $|\int_{y^k}^{+\infty} \frac{dx}{x^2} \sum_{n\le x} f_y(n)e(n\theta)| \le \int_{y^k}^{+\infty} \frac{dx}{x^2}\psi(x,y) \le A\int_{y^k}^{+\infty} \frac{dx}{x}\exp(-\frac{\log x}{2\log y})$

$\le A\log y \int_k^{+\infty} e^{-\frac{u}{2}} du = 2Ae^{-\frac{k}{2}}\log y.$

– $|\int_1^{y^k} \frac{dx}{x^2} \sum_{n\le x} f_y(n)e(n\theta)| \le \int_1^{y^k} \frac{dx}{x} |\frac{1}{x}\sum_{n\le x} f_y(n)e(n\theta)|$

$\le \int_1^{x_0} \frac{dx}{x} + \int_{x_0}^{y^k} \varepsilon' \frac{dx}{x} \le \log x_0 + \varepsilon' k \log y.$

– Donc $|\frac{1}{\log y} \sum_{\substack{n=1\\ P(n)\le y}}^{+\infty} \frac{e(n\theta)}{n} f(n)| \le k\varepsilon' + 2Ae^{-\frac{k}{2}} + \frac{\log x_0}{\log y}$.

On prend $k = 2\log\frac{1}{\varepsilon'}$, ce qui donne:

$|\frac{1}{\log y} \sum_{\substack{n=1\\ P(n)\le y}}^{+\infty} \frac{e(n\theta)}{n} f(n)| \le \underbrace{2(A\varepsilon' + \varepsilon'\log\frac{1}{\varepsilon'})}_{<\varepsilon} + \frac{\log x_0}{\log y}$

Donc $\exists y_0, \forall y \ge y_0, |\frac{1}{\log y} \sum_{\substack{n=1\\ P(n)\le y}}^{+\infty} \frac{e(n\theta)}{n} f(n)| < \varepsilon$, d'où le théorème.

3. Le cas où θ est rationnel

On suppose dorénavant $\theta = \frac{a}{q}$, avec $(a,q) = 1$. La première étape consiste à se ramener aux caractères de Dirichlet:

Lemme 2. *Pour $y \ge q$, on a* $\sum_{\substack{n=1\\ P(n)\le y}}^{+\infty} \frac{e(n\theta)}{n} f(n) = \sum_{m|q} \sum_{\substack{c=1\\ (c,m)=1}}^{m} e(\frac{ac}{m}) H_{m,c}(y)$, *avec:*

(i) si $\exists p, p|\frac{q}{m}, p\nmid m$ tel que $\forall r \ge 0$, $f(p^{r+v_p(\frac{q}{m})}) = 0$, alors $H_{m,c}(y) = 0$,

(ii) sinon $\forall y \geq \delta$, $H_{m,c}(y) = \frac{1}{\phi(m)} \frac{f(\frac{q}{m}\delta)}{\frac{q}{m}\delta} \sum_{\chi \bmod m} \overline{\chi(c)}\chi(\delta) \sum_{\substack{k=1 \\ P(k)<y}}^{+\infty} \frac{f_m(k)\chi(k)}{k}$,

où $\delta = \prod_{\substack{p|\frac{q}{m} \\ p\nmid m}} p^{\alpha_p}$, $\alpha_p = \min\{r \geq 0,\ f(p^{r+v_p(\frac{q}{m})}) \neq 0\}$,

et f_m *est la fonction multiplicative définie par*

$$f_m(p^l) = \begin{cases} \frac{f(p^{v_p(\frac{q}{m})+\alpha_p+l})}{f(p^{v_p(\frac{q}{m})+\alpha_p})} & \textit{si } p|\frac{q}{m} \textit{ et } p\nmid m \\ f(p^l) & \textit{sinon} \end{cases}$$

PREUVE :

– $\sum_{\substack{n\leq x \\ P(n)\leq y}} \frac{e(n\theta)}{n} f(n) = \sum_{b=1}^{q} e(\frac{ab}{q}) \sum_{\substack{k\leq x \\ P(k)\leq y \\ k\equiv b \bmod q}} \frac{f(k)}{k} = \sum_{b=1}^{q} e(\frac{ab}{q}) \sum_{\substack{k\leq \frac{x}{(b,q)} \\ P(k)\leq y \\ k\equiv \frac{b}{(b,q)} \bmod \frac{q}{(b,q)}}} \frac{f(k(b,q))}{k(b,q)}$,

car $y \geq q$.

Posons $m := \frac{q}{(b,q)}$ et $c := \frac{b}{(b,q)}$. On obtient:

$\sum_{\substack{n\leq x \\ P(n)\leq y}} \frac{e(n\theta)}{n} f(n) = \sum_{m|q} \sum_{\substack{c=1 \\ (c,m)=1}}^{m} e(\frac{ac}{m}) \sum_{\substack{k\leq \frac{mx}{q} \\ P(k)<y \\ k\equiv c \bmod m}} \frac{f(\frac{q}{m}k)}{\frac{q}{m}k}$

Or $\sum_{\substack{k\leq \frac{mx}{q} \\ P(k)\leq y \\ k=c \bmod m}} \frac{f(\frac{q}{m}k)}{k} = \frac{q}{mx} \sum_{\substack{k\leq \frac{mx}{q} \\ P(k)\leq y \\ k=c \bmod m}} f(\frac{q}{m}k) + \int_1^{\frac{mx}{q}} \frac{dt}{t^2} \sum_{\substack{k\leq t \\ P(k)\leq y \\ k\equiv c \bmod m}} f(\frac{q}{m}k)$

avec $|\sum_{\substack{k\leq t \\ P(k)\leq y \\ k\equiv c \bmod m}} f(\frac{q}{m}k)| \leq \psi(t,y) \ll t\exp(-\frac{\log t}{2\log y})$, ce qui donne la convergence absolue de la série pour $y \geq 2$.

Donc $\sum_{\substack{n=1 \\ P(n)\leq y}}^{+\infty} \frac{e(n\theta)}{n} f(n) = \sum_{m|q} \sum_{\substack{c=1 \\ (c,m)=1}}^{m} e(\frac{ac}{m}) H_{m,c}(y)$,

avec $H_{m,c}(y) = \frac{m}{q} \sum_{\substack{k=1 \\ P(k)<y \\ k\equiv c \bmod m}}^{+\infty} \frac{f(\frac{q}{m}k)}{k}$

– Posons $\delta_1 := \prod_{\substack{p|\frac{q}{m} \\ p|m}} p^{v_p(\frac{q}{m})}$ et $\delta_2 := \prod_{\substack{p|\frac{q}{m} \\ p\nmid m}} p^{v_p(\frac{q}{m})}$.

On a $k \equiv c \bmod m \Rightarrow (k,m) = 1 \Rightarrow (k,\delta_1) = 1 \Rightarrow (\delta_2 k,\delta_1) = 1$
$\Rightarrow f(\frac{q}{m}k) = f(\delta_1)f(\delta_2 k)$,

d'où $H_{m,c}(y) = \frac{m}{q} f(\delta_1) \sum_{\substack{k=1 \\ P(k)<y \\ k=c \bmod m}}^{+\infty} \frac{f(\delta_2 k)}{k}$.

– Supposons d'abord qu'il existe $p|\delta_2$ tel que $\forall r \geq 0$, $f(p^{r+v_p(\frac{q}{m})}) = 0$.
Alors $\forall k \geq 1$, $f(\delta_2 k) = 0$, car $v_p(\delta_2 k) \geq v_p(\frac{q}{m})$.
Donc $H_{m,c}(y) = 0$.

– Dans le cas contraire, δ est bien défini.
Si $\delta \nmid k$, alors il existe $p|\delta$ tel que $v_p(k) < v_p(\delta)$, d'où $v_p(\delta_2 k) = v_p(\delta_2)+v_p(k) < v_p(\frac{q}{m}) + \alpha_p$. La minimalité de α_p donne alors $f(\delta_2 k) = 0$.
On peut donc se limiter aux k qui sont multiples de δ, ce qui donne:

$H_{m,c}(y) = \frac{m}{q} f(\delta_1) \sum_{\substack{k=1 \\ P(k)<y \\ \delta k=c \bmod m}}^{+\infty} \frac{f(\delta_2\delta k)}{\delta k}$, car pour $y \geq \delta$ on a $P(\delta k) \leq y \Leftrightarrow P(k) \leq y$,

$= \frac{m}{q\delta} f(\delta_1) \sum_{\substack{k=1 \\ P(k)\leq y}}^{+\infty} \frac{f(\delta_2\delta k)}{k} \frac{1}{\phi(m)} \sum_{\chi \bmod m} \overline{\chi(c)}\chi(\delta k)$

$$= \frac{m}{\phi(m)} \frac{f(\delta_1)}{q\delta} \sum_{\chi \bmod m} \overline{\chi(c)}\chi(\delta) \sum_{\substack{k=1 \\ P(k)<y}}^{+\infty} \frac{f(\delta_2\delta k)\chi(k)}{k}.$$

Or on a: $\forall k \in \mathbf{N}^*$, $f(\delta_2\delta k) = f(\delta_2\delta)f_m(k)$.

En effet $\begin{cases} f(\delta_2\delta p^r) = f(\delta_2\delta)f(p^r) = f(\delta_2\delta)f_m(p^r) & \text{si } p \nmid \delta_2 \\ f(\delta_2\delta)f_m(p^r) = \frac{f(\delta_2\delta)}{f(p^{v_p(\delta_2\delta)})} f(p^{v_p(\delta_2\delta)+r}) = f(\delta_2\delta p^r) & \text{si } p|\delta_2 \end{cases}$

Donc $H_{m,c}(y) = \frac{m}{\phi(m)} \frac{f(\delta_1)f(\delta_2\delta)}{q\delta} \sum_{\chi \bmod m} \overline{\chi(c)}\chi(\delta) \sum_{\substack{k=1 \\ P(k)\le y}}^{+\infty} \frac{f_m(k)\chi(k)}{k}$,

ce qui termine la démonstration, car $(\delta_1,\delta_2\delta) = 1$.

a) On suppose $\forall \chi \bmod q$, $\sum_p \frac{1-\Re e f(p)\chi(p)}{p} = +\infty$.

La démonstration du théorème 2 utilise le résultat suivant, qui résulte imédiatement de $\log(1+z) = z + \mathcal{O}(|z|^2)$ (cf par exemple [2]):

Lemme 3. *Soit $(u_n)_{n\ge1}$ et $(v_n)_{n\ge1}$ deux suites de nombres complexes telles que* $\sum_{n=1}^{+\infty} |u_n|^2 < +\infty$ *et* $\sum_{n=1}^{+\infty} |u_n - v_n| < +\infty$.

Alors le produit infini $\prod_{n=1}^{+\infty} (1+u_n)e^{-v_n}$ *est absolument convergent.*

Démonstration du théorème 2 :

– D'après le lemme 2, il suffit de montrer que:

$\forall m|q$, $\forall c$, $1 \le c \le m$, $(c,m) = 1$, $H_{c,m}(y) = o(\log y) \quad (y \to +\infty)$.

On peut se placer dans le cas (ii), l'autre cas étant évident. On est donc ramené à montrer que: $\forall \chi \bmod m$, $\sum_{\substack{k=1 \\ P(k)\le y}}^{+\infty} \frac{f_m(k)\chi(k)}{k} = o(\log y) \quad (y \to +\infty)$.

Or $\sum_{\substack{k=1 \\ P(k)<y}}^{+\infty} \frac{f_m(k)\chi(k)}{k} = \prod_{p\le y} \sum_{\nu=0}^{+\infty} \frac{(\chi f_m)(p^\nu)}{p^\nu}$

$$= \prod_{p<\delta_2} \sum_{\nu=0}^{+\infty} \frac{(\chi f_m)(p^\nu)}{p^\nu} \prod_{\delta_2<p<y} \sum_{\nu=0}^{+\infty} \frac{(\chi f)(p^\nu)}{p^\nu} \qquad (y \ge \delta_2).$$

Donc il suffit de montrer que $\prod_{\delta_2<p\le y} \sum_{\nu=0}^{+\infty} \frac{(\chi f)(p^\nu)}{p^\nu} = o(\log y) \quad (y \to +\infty)$.

– On peut écrire:

$\prod_{\delta_2<p<y} (1-\frac{1}{p}) \prod_{\delta_2<p<y} \sum_{\nu=0}^{+\infty} \frac{(\chi f)(p^\nu)}{p^\nu} \prod_{\delta_2<p<y} \exp(\frac{1-(\chi f)(p)}{p}) = \prod_{\delta_2<p<y} (1+u_p)e^{-v_p}$,

avec $u_p = \frac{(\chi f)(p)-1}{p} + \sum_{\nu=2}^{+\infty} \frac{(\chi f)(p^\nu)-(\chi f)(p^{\nu-1})}{p^\nu}$ et $v_p = \frac{(\chi f)(p)-1}{p}$.

Or $|u_p - v_p| = |\sum_{\nu=2}^{+\infty} \frac{(\chi f)(p^\nu)-(\chi f)(p^{\nu-1})}{p^\nu}| \le \sum_{\nu=2}^{+\infty} \frac{2}{p^\nu} = \frac{2}{p(p-1)}$,

donc $\sum_p |u_p - v_p| < +\infty$.

Par ailleurs $|u_p|^2 \le 2|\frac{(\chi f)(p)-1}{p}|^2 + 2|\sum_{\nu=2}^{+\infty} \frac{(\chi f)(p^\nu)-(\chi f)(p^{\nu-1})}{p^\nu}|^2 \le \frac{8}{p^2}(1+\frac{1}{(p-1)^2})$,

ce qui donne $\sum_p |u_p|^2 < +\infty$.

Donc d'après le lemme 3, le produit infini $\prod_{p>\delta_2} (1+u_p)e^{-v_p}$ est absolument convergent.

Par conséquent:

$$|\prod_{\delta_2<p\le y}\sum_{\nu=0}^{+\infty}\frac{(\chi f)(p^\nu)}{p^\nu}| = |\prod_{\delta_2<p\le y}(1+u_p)e^{-v_p}||\prod_{\delta_2<p\le y}(1-\tfrac{1}{p})^{-1}||\prod_{\delta_2<o\le y}e^{-v_p}|$$
$$\ll \exp(-\sum_{\delta_2<p\le y}\frac{1-\Re e\chi f(p)}{p})\log y$$

Or $\sum_{\delta_2<p\le y}\frac{1-\Re e\chi f(p)}{p}$ tend vers $+\infty$ par hypothèse.

Donc $\prod_{\delta_2<p\le y}\sum_{\nu=0}^{+\infty}\frac{(\chi f)(p^\nu)}{p^\nu} = o(\log y)\quad (y\to+\infty)$, ce qui termine la démonstration.

b) On suppose $\exists\chi \bmod q$, $\sum_p \frac{1-\Re ef(p)\chi(p)}{p} < +\infty$.

On note $\chi^* \bmod m^*$ l'unique caractère primitif équivalent à χ.

Lemme 4. *Soit $m|q$, $1\le c\le m$ tels que $(c,m)=1$.*
(i) Si $m^*\nmid m$, alors $H_{m,c}(y) = o(\log y)\quad (y\to+\infty)$.
(ii) Si $m^*|m$, alors quand $y\to+\infty$ on a:

$$\prod_{p\le y}(1-\tfrac{1}{p})H_{m,c}(y) = \frac{f(\delta_1)}{m\delta_1}\overline{\chi^*(c\delta_2)}\prod_{\substack{p\le y\\ p\nmid m}}(1-\tfrac{1}{p})\sum_{r=v_p(\frac{q}{m})}^{+\infty}\frac{\chi^*(p^r)f(p^r)}{p^r}+o(1).$$

où $\delta_1 := \prod_{\substack{p|\frac{q}{m}\\ p|m}} p^{v_p(\frac{q}{m})}$ *et* $\delta_2 := \prod_{\substack{p|\frac{q}{m}\\ p\nmid m}} p^{v_p(\frac{q}{m})}$.

Preuve :

– On sait (cf [2]) que $\sum_p \frac{1-\Re ef(p)\chi(p)}{p}\begin{cases}<+\infty & \text{si } \chi\sim\chi^*\\ =+\infty & \text{sinon}\end{cases}$

Donc le cas $m^*\nmid m$ se démontre comme dans le théorème 2.

– Supposons $m^*|m$ et $\forall p|\delta_2$, $\exists r\ge 0$, $f(p^{r+v_p(\frac{q}{m})})\neq 0$.

$$\forall y\ge\delta,\ \prod_{p\le y}(1-\tfrac{1}{p})H_{m,c}(y) = \frac{1}{\phi(m)}\frac{f(\frac{q}{m}\delta)}{\frac{q}{m}\delta}\sum_{\chi \bmod m}\overline{\chi(c)}\chi(\delta)\prod_{p\le y}\sum_{\substack{k=1\\ P(k)\le y}}^{+\infty}\frac{f_m(k)\chi(k)}{k}.$$

Il suffit de considérer le caractère $\chi_m \bmod m$ qui est équivalent à χ^* (les autres donnent une contribution en o(1) comme dans le théorème 2).

– On a $\prod_{p\le y}(1-\frac{1}{p})\sum_{\substack{k=1\\ P(k)<y}}^{+\infty}\frac{f_m(k)\chi_m(k)}{k} = \prod_{p\le y}(1-\frac{1}{p})\sum_{r=0}^{+\infty}\frac{\chi_m(p^r)f_m(p^r)}{p^r}$

$$= \prod_{p|m}(1-\tfrac{1}{p})\prod_{\substack{p\le y\\ p\nmid m}}(1-\tfrac{1}{p})\sum_{r=0}^{+\infty}\frac{\chi^*(p^r)f_m(p^r)}{p^r}\quad (y\ge q)$$
$$= \frac{\phi(m)}{m}\prod_{\substack{p\le y\\ p\nmid m}}(1-\tfrac{1}{p})\sum_{r=0}^{+\infty}\frac{\chi^*(p^r)f_m(p^r)}{p^r}.$$

Étudions d'abord les facteurs pour lesquels $p|\delta_2$. On a:

$$\forall r\ge 0, \frac{\chi^*(p^r)f_m(p^r)}{p^r} = \frac{1}{f(p^{v_p(\delta_2\delta)})}\frac{\chi^*(p^r)f(p^{v_p(\delta_2\delta)+r})}{p^r}$$

c'est-à-dire:

$$\forall r\ge 0, \frac{\chi^*(p^r)f_m(p^r)}{p^r} = \frac{\overline{\chi^*(p^{v_p(\delta_2\delta)})}p^{v_p(\delta_2\delta)}}{f(p^{v_p(\delta_2\delta)})}\frac{\chi^*(p^{v_p(\delta_2\delta)+r})f(p^{v_p(\delta_2\delta)+r})}{p^{v_p(\delta_2\delta)+r}}.$$

Donc:

$$\sum_{r=0}^{+\infty}\frac{\chi^*(p^r)f_m(p^r)}{p^r} = \frac{\overline{\chi^*(p^{v_p(\delta_2\delta)})}p^{v_p(\delta_2\delta)}}{f(p^{v_p(\delta_2\delta)})}\sum_{r=v_p(\delta_2\delta)}^{+\infty}\frac{\chi^*(p^r)f(p^r)}{p^r}.$$

On peut remplacer la condition $r \geq v_p(\delta_2\delta)$ par $r \geq v_p(\frac{q}{m})$, car on a $f(p^r) = 0$ quand $v_p(\frac{q}{m}) \leq r < v_p(\frac{q}{m}) + \alpha_p = v_p(\delta_2\delta)$.
Comme δ et δ_2 ont les mêmes facteurs premiers, on trouve pour $y \geq q(\geq \delta_2)$:

$$\prod_{p|\delta_2}(1-\frac{1}{p})\sum_{r=0}^{+\infty}\frac{\chi^*(p^r)f_m(p^r)}{p^r} = \frac{\overline{\chi^*(\delta_2\delta)}\delta_2\delta}{f(\delta_2\delta)}\prod_{p|\delta_2}(1-\frac{1}{p})\sum_{r=v_p(\frac{q}{m})}^{+\infty}\frac{\chi^*(p^r)f(p^r)}{p^r}.$$

Dans les autres facteurs (ceux pour lesquels $p \nmid \frac{q}{m}$), on a:

$$\sum_{r=0}^{+\infty}\frac{\chi^*(p^r)f_m(p^r)}{p^r} = \sum_{r=v_p(\frac{q}{m})}^{+\infty}\frac{\chi^*(p^r)f(p^r)}{p^r}.$$

– Finalement on trouve, pour $y \geq q$:
$\prod_{p\leq y}(1-\frac{1}{p})\sum_{\substack{k=1\\P(k)\leq y}}^{+\infty}\frac{f_m(k)\chi_m(k)}{k} = \frac{\phi(m)}{m}\frac{\overline{\chi^*(\delta_2\delta)}\delta_2\delta}{f(\delta_2\delta)}\prod_{\substack{p\leq y\\p\nmid m}}(1-\frac{1}{p})\sum_{r=v_p(\frac{q}{m})}^{+\infty}\frac{\chi^*(p^r)f(p^r)}{p^r}$
d'où:
$\prod_{p\leq y}(1-\frac{1}{p})H_{m,c}(y) = \frac{f(\frac{q}{m}\delta)}{q\delta}\overline{\chi^*(c)}\chi^*(\delta)\frac{\overline{\chi^*(\delta_2\delta)}\delta_2\delta}{f(\delta_2\delta)}\prod_{\substack{p\leq y\\p\nmid m}}(1-\frac{1}{p})\sum_{r=v_p(\frac{q}{m})}^{+\infty}\frac{\chi^*(p^r)f(p^r)}{p^r}+$
$o(1)$
$= \frac{f(\delta_1)}{m\delta_1}\overline{\chi^*(c\delta_2)}\prod_{\substack{p\leq y\\p\nmid m}}(1-\frac{1}{p})\sum_{r=v_p(\frac{q}{m})}^{+\infty}\frac{\chi^*(p^r)f(p^r)}{p^r}+o(1)$
et le résultat est encore vrai lorsque $\exists p, p|\frac{q}{m}, p\nmid m$, tel que $\forall r \geq 0, f(p^{r+v_p(\frac{q}{m})}) = 0$.

Pour simplifier ce résultat, on a besoin à nouveau du lemme 3. On obtient ainsi:

Lemme 5. *Soit $m|q$, $1 \leq c \leq m$ tels que $(c,m) = 1$. On suppose $m^*|m$. Alors:*

$$\prod_{p\leq y}(1-\frac{1}{p})H_{m,c}(y) = \overline{\chi^*(c)}B_m\exp(iA(y)) + o(1) \quad (y \to +\infty)$$

avec $A(y) = \sum_{p<y}\frac{\Im m\chi^*(p)f(p)}{p}$
et $B_m = \frac{\overline{\chi^*(\delta_2)}f(\delta_1)}{m\delta_1}\exp(-i\sum_{\substack{p|m\\p\nmid m^*}}\frac{1}{p}\Im m\chi^*(p)f(p))$
$\prod_{p\nmid m}(1-\frac{1}{p})(\sum_{r=v_p(\frac{q}{m})}^{+\infty}\frac{f(p^r)\chi^*(p^r)}{p^r})\exp(-\frac{i}{p}\Im m\chi^*(p)f(p))$,
le produit infini dans B_m étant absolument convergent.

PREUVE :
– Il suffit de montrer que le produit infini

$$\prod_{p\nmid m}(1-\frac{1}{p})(\sum_{r=v_p(\frac{q}{m})}^{+\infty}\frac{f\chi^*(p^r)}{p^r})\exp(-\frac{i\Im mf\chi^*(p)}{p})$$

est bien convergent. En effet on aura alors, pour $y \geq q$:
$\prod_{\substack{p\leq y\\p\nmid m}}(1-\frac{1}{p})\sum_{r=v_p(\frac{q}{m})}^{+\infty}\frac{f\chi^*(p^r)}{p^r}$
$= \prod_{\substack{p\leq y\\p\nmid m}}\exp(\frac{i\Im mf\chi^*(p)}{p})\prod_{\substack{p\leq y\\p\nmid m}}(1-\frac{1}{p})(\sum_{r=v_p(\frac{q}{m})}^{+\infty}\frac{f\chi^*(p^r)}{p^r})\exp(-\frac{i\Im mf\chi^*(p)}{p})$

$= e^{iA(y)} \prod_{p|m} \exp(-\frac{i\Im m f\chi^*(p)}{p}) \{ \prod_{p\nmid m} (1-\frac{1}{p}) (\sum_{r=v_p(\frac{q}{m})}^{+\infty} \frac{f\chi^*(p^r)}{p^r}) \exp(-\frac{i\Im m f\chi^*(p)}{p}) + o(1) \}$

d'où $\prod_{p\le y} (1-\frac{1}{p}) H_{m,c}(y) = \overline{\chi^*(c)} B_m \exp(iA(y)) + o(1)$ d'après le lemme 4.

– Si on pose $u_p = (1-\frac{1}{p}) \sum_{r=v_p(\frac{q}{m})}^{+\infty} \frac{f\chi^*(p^r)}{p^r} - 1$ et $v_p = \frac{i}{p}\Im m f\chi^*(p)$, le terme général du produit infini s'écrit $(1+u_p)e^{-v_p}$. De plus, pour $p > \frac{q}{m}$, on a:

$u_p = \sum_{r=1}^{+\infty} \frac{f\chi^*(p^r) - f\chi^*(p^{r-1})}{p^r}$ et $u_p - v_p = \frac{\Re e f\chi^*(p) - 1}{p} + \sum_{r=2}^{+\infty} \frac{f\chi^*(p^r) - f\chi^*(p^{r-1})}{p^r}$,

d'où $|u_p| \le \frac{2}{p-1}$ et $|u_p - v_p| \le \frac{1}{p}(1 - \Re e f\chi^*(p)) + \frac{2}{p(p-1)}$.

Donc $\sum_p |u_p|^2 < +\infty$ et $\sum_p |u_p - v_p| < +\infty$, ce qui donne le résultat d'après le lemme 3.

Démonstration du théorème 3 : D'après les lemmes 2, 4 et 5, on a:

$\prod_{p\le y} (1-\frac{1}{p}) \sum_{\substack{n=1 \\ P(n)<y}}^{+\infty} \frac{e(n\theta)}{n} f(n) = \sum_{m^*|m|q} \sum_{\substack{c=1 \\ (c,m)=1}}^{m} e(\frac{ac}{m}) \{ \overline{\chi^*(c)} B_m \exp(iA(y)) + o(1) \} + o(1).$

Or $\sum_{\substack{c=1 \\ (c,m)=1}}^{m} e(\frac{ac}{m}) \overline{\chi^*(c)} = \sum_{\substack{c=1 \\ (c,m)=1}}^{m} e(\frac{ac}{m}) \overline{\chi_m(c)} = \tau(\overline{\chi_m}) \chi_m(a)$

$= \tau(\overline{\chi^*}) \mu(\frac{m}{m^*}) \overline{\chi^*(\frac{m}{m^*})} \chi^*(a).$

Donc $\prod_{p\le y} (1-\frac{1}{p}) \sum_{\substack{n=1 \\ P(n)\le y}}^{+\infty} \frac{e(n\theta)}{n} f(n) = \chi^*(a) K(q) \exp(iA(y)) + o(1),$

avec $K(q) = \sum_{m^*|m|q} \tau(\overline{\chi^*}) \mu(\frac{m}{m^*}) \overline{\chi^*(\frac{m}{m^*})} B_m.$

ce qui termine la démonstration en reportant dans $K(q)$ la valeur de B_m et en utilisant la formule de Mertens: $\prod_{p\le y} (1-\frac{1}{p}) \sim \frac{e^{-\gamma}}{\log y} \quad (y \to +\infty)$.

4. Le cas $f = 1$

a) Transformation de la somme

Posons $E(x,y;\theta) = \sum_{\substack{n\le x \\ P(n)\le y}} e(n\theta)$. Dans la suite on prendra $\theta = \frac{a}{q}$, $(a,q) = 1$.

$$E(x,y;\theta) = \sum_{\substack{n\le x \\ P(n)\le y}} e(\frac{an}{q}) = \sum_{b=1}^{q} e(\frac{ab}{q}) \sum_{\substack{n\le x \\ P(n)\le y \\ n\equiv b \bmod q}} 1 = \sum_{\substack{b=1 \\ P((b,q))\le y}}^{q} e(\frac{ab}{q}) \sum_{\substack{k\le \frac{x}{(b,q)} \\ P(k)\le y \\ k\equiv \frac{b}{(b,q)} \bmod \frac{q}{(b,q)}}} 1$$

Si on suppose $y \ge q$, la condition $P((b,q)) \le y$ est toujours vérifiée, ce qui donne:

$$E(x,y;\theta) = \sum_{b=1}^{q} e(\frac{ab}{q}) \sum_{\substack{k\le \frac{x}{(b,q)} \\ P(k)\le y \\ k\equiv \frac{b}{(b,q)} \bmod \frac{q}{(b,q)}}} 1$$

Posons $m = \frac{q}{(b,q)}$ et $c = \frac{b}{(b,q)}$. On obtient alors:

$$E(x,y;\theta) = \sum_{m|q} \sum_{\substack{c=1 \\ (c,m)=1}}^{m} e(\frac{ac}{m}) \sum_{\substack{k\le \frac{mx}{q} \\ P(k)\le y \\ k\equiv c \bmod m}} 1$$

puis, en utilisant l'orthogonalité des caractères:

$$E(x,y;\theta)=\sum_{m|q}\sum_{\substack{c=1\\(c,m)=1}}^{m} e(\frac{ac}{m})\sum_{\substack{k\leq \frac{mx}{q}\\P(k)<y}}\frac{1}{\phi(m)}\sum_{\chi \bmod m}\overline{\chi}(c)\chi(k)$$

$$E(x,y;\theta)=\sum_{m|q}\frac{1}{\phi(m)}\sum_{\chi \bmod m}\Big(\sum_{\substack{c=1\\(c,m)=1}}^{m}\overline{\chi}(c)e(\frac{ac}{m})\Big)\sum_{\substack{k\leq \frac{mx}{q}\\P(k)\leq y}}\chi(k)$$

$$E(x,y;\theta)=\sum_{m|q}\frac{1}{\phi(m)}\sum_{\chi \bmod m}\tau(\overline{\chi})\chi(a)\sum_{\substack{k\leq \frac{mx}{q}\\P(k)\leq y}}\chi(k) \tag{3}$$

Posons maintenant $S(y,\theta)=\sum\limits_{\substack{n=1\\P(n)\leq y}}^{+\infty}\frac{e(n\theta)}{n}$. Une sommation par parties donne:

$$\sum_{\substack{y<n\leq N\\P(n)\leq y}}\frac{e(n\theta)}{n}=\frac{1}{N}\sum_{\substack{n\leq N\\P(n)\leq y}}e(n\theta)-\frac{1}{y}\sum_{\substack{n\leq y\\P(n)\leq y}}e(n\theta)+\int_y^N\frac{dx}{x^2}\sum_{\substack{n\leq x\\P(n)\leq y}}e(n\theta)$$

c'est-à-dire:

$$\sum_{\substack{n<N\\P(n)\leq y}}\frac{e(n\theta)}{n}=\sum_{\substack{n<y\\P(n)\leq y}}\frac{e(n\theta)}{n}+\frac{1}{N}E(N,y;\theta)-\frac{1}{y}E(y,y;\theta)+\int_y^N\frac{dx}{x^2}E(x,y;\theta)$$

Comme $|E(x,y;\theta)|\leq\psi(x,y)\ll x\exp(-\frac{\log x}{2\log y})$, l'intégrale $\int\limits_y^{+\infty}\frac{dx}{x^2}E(x,y;\theta)$ est absolument convergente. On en déduit la convergence de la série $S(y,\theta)$ et l'identité:

$$S(y,\theta)=\sum_{n<y}\frac{e(n\theta)}{n}-\frac{1}{y}E(y,y;\theta)+\int_y^{+\infty}\frac{dx}{x^2}E(x,y;\theta) \tag{4}$$

Posons $g(n)=\begin{cases}\chi(\frac{nm}{q}) & \text{si } \frac{q}{m}|n \text{ et } P(\frac{nm}{q})\leq y\\ 0 & \text{sinon}\end{cases}$. Une nouvelle sommation par parties donne:

$$\sum_{\substack{y<\frac{qk}{m}\leq N\\P(k)\leq y}}\frac{\chi(k)}{k}=\frac{q}{m}\sum_{y<n\leq N}\frac{g(n)}{n}$$

$$=\frac{q}{mN}\sum_{n<N}g(n)-\frac{q}{my}\sum_{n<y}g(n)+\frac{q}{m}\int_y^N\frac{dx}{x^2}\sum_{n<x}g(n)$$

$$=\frac{q}{mN}\sum_{\substack{k\leq \frac{mN}{q}\\P(k)<y}}\chi(k)-\frac{q}{my}\sum_{\substack{k\leq \frac{my}{q}\\P(k)\leq y}}\chi(k)+\frac{q}{m}\int_y^N\frac{dx}{x^2}\sum_{\substack{k\leq \frac{mx}{q}\\P(k)\leq y}}\chi(k)$$

La majoration $\Big|\sum\limits_{\substack{k\leq \frac{mx}{q}\\P(k)\leq y}}\chi(k)\Big|\leq\psi(\frac{mx}{q},y)$ permet à nouveau de faire tendre N vers $+\infty$, d'où:

$$\int_y^{+\infty}\frac{dx}{x^2}\sum_{\substack{k\leq \frac{mx}{q}\\P(k)\leq y}}\chi(k)=\frac{1}{y}\sum_{k\leq\frac{my}{q}}\chi(k)+\frac{m}{q}\sum_{\substack{k>\frac{my}{q}\\P(k)<y}}\frac{\chi(k)}{k} \tag{5}$$

En regroupant (3), (4) et (5), on obtient finalement, en séparant les caractères principaux des autres:

$$S(y,\theta) = \sum_{n<y} \frac{e(n\theta)}{n} - \frac{1}{y}E(y,y;\theta) + I(y) + J(y)$$

avec

$$I(y) = \sum_{m|q} \frac{\mu(m)}{\phi(m)} \Big(\frac{1}{y} \sum_{\substack{k \le \frac{my}{q} \\ (k,m)=1}} 1 + \frac{m}{q} \sum_{\substack{k > \frac{my}{q} \\ (k,m)=1 \\ P(k)<y}} \frac{1}{k} \Big)$$

et

$$J(y) = \sum_{m|q} \frac{1}{\phi(m)} \sum_{\substack{\chi \bmod m \\ \chi \neq \chi_0}} \tau(\overline{\chi})\chi(a) \Big(\frac{1}{y} \sum_{\substack{k \le \frac{my}{q} \\ P(k)<y}} \chi(k) + \frac{m}{q} \sum_{\substack{k > \frac{my}{q} \\ P(k)<y}} \frac{\chi(k)}{k} \Big)$$

b) Contribution des caractères principaux

On peut écrire $I(y) = S_1 + S_2 - S_3$ avec

$$S_1 = \frac{1}{y} \sum_{m|q} \frac{\mu(m)}{\phi(m)} \sum_{\substack{k \le \frac{my}{q} \\ (k,m)=1}} 1$$

$$S_2 = \frac{1}{q} \sum_{m|q} \frac{m\mu(m)}{\phi(m)} \sum_{\substack{k=1 \\ (k,m)=1 \\ P(k)<y}}^{+\infty} \frac{1}{k}$$

$$S_3 = \frac{1}{q} \sum_{m|q} \frac{m\mu(m)}{\phi(m)} \sum_{\substack{k \le \frac{my}{q} \\ (k,m)=1}} \frac{1}{k}$$

– On a tout d'abord:

$$S_1 = \frac{1}{y} \sum_{m|q} \frac{\mu(m)}{\phi(m)} \sum_{k \le \frac{my}{q}} \sum_{\substack{l|k \\ l|m}} \mu(l) = \frac{1}{y} \sum_{m|q} \frac{\mu(m)}{\phi(m)} \sum_{l|m} \mu(l) \lfloor \frac{my}{ql} \rfloor$$

$$S_1 = \frac{1}{q} \sum_{m|q} \frac{m\mu(m)}{\phi(m)} \sum_{l|m} \frac{\mu(l)}{l} - \frac{1}{y} \sum_{m|q} \frac{\mu(m)}{\phi(m)} \sum_{l|m} \mu(l) (\frac{my}{q} - \lfloor \frac{my}{q} \rfloor)$$

ce qui, compte tenu de $\sum_{l|m} \frac{\mu(l)}{l} = \frac{\phi(m)}{m}$ et de $|\frac{my}{q} - \lfloor \frac{my}{q} \rfloor| \le 1$, donne pour $q > 1$:

$$S_1 \ll \frac{f(q)}{y}$$

où $f(q) = \sum_{m|q} \frac{d(m)}{\phi(m)} = \big(\mathbf{1} * \frac{d}{\phi}\big)(q)$.

– Ensuite, on peut écrire:

$$S_2 = \frac{1}{q} \sum_{m|q} \frac{m\mu(m)}{\phi(m)} \prod_{\substack{p \nmid m \\ p<y}} \Big(1 - \frac{1}{p}\Big)^{-1} = \frac{1}{q} \sum_{m|q} \frac{m\mu(m)}{\phi(m)} \prod_{p \le y} \Big(1 - \frac{1}{p}\Big)^{-1} \prod_{\substack{p \le y \\ p|m}} \Big(1 - \frac{1}{p}\Big)$$

On peut supposer $y \ge q$, ce qui donne $\prod_{\substack{p \le y \\ p|m}} \big(1 - \frac{1}{p}\big) = \prod_{p|m} \big(1 - \frac{1}{p}\big) = \frac{\phi(m)}{m}$ et, pour $q > 1$:

$$S_2 = 0$$

– La dernière somme à estimer est:

$$S_3 = \frac{1}{q}\sum_{m|q}\frac{m\mu(m)}{\phi(m)}\sum_{\substack{k\leq \frac{my}{q}\\(k,m)=1}}\frac{1}{k} = \frac{1}{q}\sum_{m|q}\frac{m\mu(m)}{\phi(m)}\sum_{k\leq \frac{my}{q}}\frac{1}{k}\sum_{\substack{l|k\\l|m}}\mu(l)$$

$$= \frac{1}{q}\sum_{m|q}\frac{m\mu(m)}{\phi(m)}\sum_{l|m}\mu(l)\sum_{\substack{k\leq \frac{my}{q}\\l|k}}\frac{1}{k}$$

d'où, en posant $k = ls$:

$$S_3 = \frac{1}{q}\sum_{m|q}\frac{m\mu(m)}{\phi(m)}\sum_{l|m}\frac{\mu(l)}{l}\sum_{s\leq\lfloor\frac{my}{ql}\rfloor}\frac{1}{s} = T_1 + T_2$$

avec

$$T_1 = \frac{1}{q}\sum_{m|q}\frac{m\mu(m)}{\phi(m)}\sum_{l|m}\frac{\mu(l)}{l}\log\frac{my}{ql}$$

$$T_2 = \frac{1}{q}\sum_{m|q}\frac{m\mu(m)}{\phi(m)}\sum_{l|m}\frac{\mu(l)}{l}\Big(\sum_{s\leq\lfloor\frac{my}{ql}\rfloor}\frac{1}{s} - \log\frac{my}{ql}\Big)$$

Dès que $q > 1$, on a:

$$T_1 = \frac{1}{q}\sum_{m|q}\frac{m\mu(m)}{\phi(m)}\sum_{l|m}\frac{\mu(l)}{l}\log\frac{m}{l} + \frac{1}{l}\Big(\log\frac{y}{q}\Big)\underbrace{\sum_{m|q}\frac{m\mu(m)}{\phi(m)}\sum_{l|m}\frac{\mu(l)}{l}}_{=0}$$

Dans la somme, on peut se limiter aux $m|\tilde{q}$, où $\tilde{q} = \prod_{p|q} p$ (sinon $\mu(m) = 0$). Donc:

$$T_1 = \frac{1}{q}\sum_{m|\tilde{q}}\frac{m\mu(m)}{\phi(m)}\sum_{l|m}\frac{\mu(l)}{l}\log\frac{m}{l} = \frac{1}{q}\sum_{m|\tilde{q}}\frac{m\mu(m)}{\phi(m)}\sum_{p|m}\log p\sum_{\substack{l|m\\p\nmid\frac{m}{l}}}\frac{\mu(l)}{l}$$

$$T_1 = \frac{1}{q}\sum_{m|\tilde{q}}\frac{m\mu(m)}{\phi(m)}\sum_{p|m}\log p\sum_{\substack{l|m\\p\nmid l}}\frac{\mu(l)}{l}$$

Or $\frac{\phi(m)}{m} = \sum_{l|m}\frac{\mu(l)}{l} = \sum_{\substack{l|m\\p\nmid l}}\frac{\mu(l)}{l} + \sum_{\substack{l|m\\p\nmid l}}\frac{\mu(pl)}{pl} = \big(1-\frac{1}{p}\big)\sum_{\substack{l|m\\p\nmid l}}\frac{\mu(l)}{l}$, soit $\sum_{\substack{l|m\\p\nmid l}}\frac{\mu(l)}{l} = \frac{p\phi(m)}{(p-1)m}$, donc

$$T_1 = \frac{1}{q}\sum_{m|\tilde{q}}\mu(m)\sum_{p|m}\frac{p\log p}{p-1} = \frac{1}{q}\sum_{p|\tilde{q}}\frac{p\log p}{p-1}\sum_{\substack{m|\tilde{q}\\p|m}}\mu(m)$$

$$T_1 = \frac{1}{q}\sum_{p|\tilde{q}}\frac{p\log p}{p-1}\Big(\sum_{m|\tilde{q}}\mu(m) - \sum_{p|m}\mu(m)\Big) = -\frac{1}{q}\sum_{p|\tilde{q}}\frac{p\log p}{p-1}\delta(\frac{\tilde{q}}{p})$$

Comme $\delta(\frac{\tilde{q}}{p})$ est non nul si et seulement si q est une puissance de p, on trouve:

$$T_1 = -\frac{\Lambda(q)}{\phi(q)}$$

Reste à estimer T_2. On utilise l'estimation $\sum_{s\leq u}\frac{1}{s}=\log u+\gamma+\mathcal{O}(\frac{1}{u})$ ce qui donne:

$$\sum_{s\leq\lfloor\frac{my}{ql}\rfloor}\frac{1}{s}-\log\frac{my}{ql}=\log\lfloor\frac{my}{ql}\rfloor-\log\frac{my}{ql}+\gamma+\mathcal{O}(\frac{ql}{my})=\gamma+\mathcal{O}(\frac{ql}{my})$$

car d'après le théorème des accroissements finis, on a
$\big|\log\lfloor\frac{my}{ql}\rfloor-\log\frac{my}{ql}\big|=\frac{\frac{my}{ql}-\lfloor\frac{my}{ql}\rfloor}{\theta}$ avec $\theta\in]\lfloor\frac{my}{ql}\rfloor,\frac{my}{ql}[$.
On obtient ainsi, pour $q>1$:

$$T_2=\frac{1}{q}\sum_{m|q}\frac{m\mu(m)}{\phi(m)}\sum_{l|m}\frac{\mu(l)}{l}\Big(\gamma+\mathcal{O}(\frac{ql}{my})\Big)=\mathcal{O}(\frac{f(q)}{y}).$$

Finalement

$$I(y)=\frac{\Lambda(q)}{\phi(q)}+\mathcal{O}(\frac{f(q)}{y})$$

c) Contribution des caractères non principaux

On peut écrire $J(y)=J_1(y)+J_2(y)$, avec:

$$J_1(y)=\frac{1}{y}\sum_{m|q}\frac{1}{\phi(m)}\sum_{\substack{\chi \bmod m\\ \chi\neq\chi_0}}\tau(\overline{\chi})\chi(a)\sum_{k\leq\frac{my}{q}}\chi(k)$$

$$J_2(y)=\frac{1}{q}\sum_{m|q}\frac{m}{\phi(m)}\sum_{\substack{\chi \bmod m\\ \chi\neq\chi_0}}\tau(\overline{\chi})\chi(a)\sum_{\substack{k>\frac{my}{q}\\ P(k)\leq y}}\frac{\chi(k)}{k}$$

– Pour tout caractère non principal modulo m, la somme $\sum_{k\leq u}\chi(k)$ est bornée par $\sqrt{m}\log m$, d'après l'inégalité de Polya-Vinogradov. De plus $|\tau(\overline{\chi})|\leq\sqrt{m}$. Donc:

$$J_1(y)\ll\frac{1}{y}\sum_{m|q}\sqrt{m}\sqrt{m}\log m\ll\frac{\sigma(q)}{y}\log q$$

où $\sigma(q)=\sum_{m|q}m$.

– Pour majorer $J_2(y)$, il suffit d'estimer

$$\sum_{\substack{k>\frac{my}{q}\\ P(k)\leq y}}\frac{\chi(k)}{k}=\underbrace{\Big(L(1,\chi)-\sum_{k\leq\frac{my}{q}}\frac{\chi(k)}{k}\Big)}_{U_1(y)}-\underbrace{\Big(L(1,\chi)-\prod_{p\leq y}\big(1-\frac{\chi(p)}{p}\big)^{-1}\Big)}_{U_2(y)}$$

Une sommation par parties donne immédiatement (χ étant non principal):

$$U_1(y)=\sum_{k>\frac{my}{q}}\frac{\chi(k)}{k}=-\frac{q}{my}\sum_{k\leq\frac{my}{q}}\chi(k)+\frac{q}{m}\int_y^{+\infty}\frac{dx}{x^2}\sum_{k\leq\frac{my}{q}}\chi(k)$$

ce qui, en utilisant à nouveau l'inégalité de Polya-Vinogradov, donne:

$$U_1(y)\ll\frac{q}{\sqrt{m}y}\log m.$$

Pour étudier $U_2(y)$, on remarque que:

$$\log \prod_{p\leq y}\Big(1-\frac{\chi(p)}{p}\Big)^{-1}-\log L(1,\chi)=\sum_{p>y}\log(1-\frac{\chi(p)}{p})$$

$$=-\sum_{p>y}\frac{\chi(p)}{p}+\sum_{p>y}\Big(\log\big(1-\frac{\chi(p)}{p}\big)+\frac{\chi(p)}{p}\Big)$$

La deuxième somme donne une contribution en $\mathcal{O}(\frac{1}{y})$.
Pour la première somme, on va démontrer le résultat suivant:

Lemme 6. *Pour χ caractère non principal modulo m, on a:*

$$\sum_{p>y}\frac{\chi(p)}{p}\ll\frac{1}{\log y}\Big(\frac{\sqrt{m}\log m}{|L(1,\chi)|}+1\Big).$$

DÉMONSTRATION : Une sommation par parties donne:

$$\sum_{p>y}\frac{\chi(p)}{p}=-\frac{1}{\log y}\sum_{p\leq y}\frac{\chi(p)\log p}{p}+\int_y^{+\infty}\frac{du}{u(\log u)^2}\sum_{p\leq u}\frac{\chi(p)\log p}{p}$$

Or on a

$$\sum_{n\leq y}\frac{\chi(n)\log n}{n}=\sum_{k\leq y}\frac{\chi(k)\Lambda(k)}{k}\sum_{l\leq\frac{y}{k}}\frac{\chi(l)}{l}$$

$$=\sum_{k\leq y}\frac{\chi(k)\Lambda(k)}{k}\Big(L(1,\chi)+\mathcal{O}(\frac{k\sqrt{m}\log m}{y})\Big)$$

$$=L(1,\chi)\Big(\sum_{p\leq y}\frac{\chi(p)\log p}{p}+\sum_{p\leq y}\log p\sum_{\alpha=2}^{+\infty}\frac{1}{p^\alpha}\Big)+\mathcal{O}(\frac{\psi(y)}{y}\sqrt{m}\log m)$$

ce qui donne, en tenant compte de $\psi(y)\ll y$ et de $L(1,\chi)\neq 0$:

$$\sum_{p\leq y}\frac{\chi(p)\log p}{p}=\frac{1}{L(1,\chi)}\Big(\sum_{n\leq y}\frac{\chi(n)\log n}{n}+\mathcal{O}(\sqrt{m}\log m)\Big)+\mathcal{O}(1).$$

Or, toujours d'après l'inégalité de Polya-Vinogradov, on a:

$$\sum_{n\leq y}\frac{\chi(n)\log n}{n}\ll\sqrt{m}\log m.$$

Le lemme est donc démontré.

– En utilisant le lemme, on obtient:

$$U_2(y)=L(1,\chi)\Big(1-\exp\big(\log\prod_{p\leq y}\Big(1-\frac{\chi(p)}{p}\Big)^{-1}-\log L(1,\chi)\big)\Big)$$

$$U_2(y)=L(1,\chi)\left(1-\exp\Big(\mathcal{O}\Big(\frac{1}{\log y}\big(\frac{\sqrt{m}}{|L(1,\chi)|}+1\big)\Big)\Big)\right).$$

Si on suppose $\sqrt{m}\log m\ll|L(1,\chi)|\log y$, cela donne:

$$U_2(y)\ll|L(1,\chi)|\frac{1}{\log y}\Big(\frac{\sqrt{m}}{|L(1,\chi)|}+1\Big)\ll\frac{1}{\log y}\big(\sqrt{m}\log m+|L(1,\chi)|\big).$$

Or, l'inégalité de Polya-Vinogradov montre que $|L(1,\chi)|\ll\sqrt{m}\log m$. Donc:

$$U_2(y)\ll\frac{\sqrt{m}\log m}{\log y}.$$

En regroupant tous les résultats de ce paragraphe, on obtient finalement:

$$J(y) \ll \frac{\sigma(q)\log q}{y} + \frac{\sigma_2(q)\log q}{q\log y} \ll \frac{q\log q}{\log y}$$

à condition de supposer que:

$$\forall m|q,\ \ \forall \chi \bmod m,\ \ \sqrt{m}\log m \ll |L(1,\chi)|\log y \tag{6}$$

d) Conclusion

$$S(y,\theta) = \sum_{n\le y}\frac{e(n\theta)}{n} - \frac{1}{y}E(y,y;\theta) + I(y) + J(y)$$

avec $I(y) = \frac{\Lambda(q)}{\phi(q)} + \mathcal{O}(\frac{f(q)}{y})$ et $J(y) = \mathcal{O}(\frac{q\log q}{\log y})$. De plus:

$$\sum_{n\le y}\frac{e(n\theta)}{n} - \log\Big(\frac{1}{1-e(\theta)}\Big) = -\sum_{n>y}\frac{e(n\theta)}{n}$$

$$= -\frac{1}{y}\sum_{n<y}e(n\theta) - \int_y^{+\infty}\frac{dx}{x^2}\sum_{n<x}e(n\theta) = \mathcal{O}(\frac{q}{y})$$

et, de même:

$$\frac{1}{y}E(y,y;\theta) = \frac{1}{y}\sum_{n<y}e(n\theta) = \mathcal{O}(\frac{q}{y}).$$

On trouve finalement, sous les conditions (6):

$$S(y,\theta) = \log\Big(\frac{1}{1-e(\theta)}\Big) + \frac{\Lambda(q)}{\phi(q)} + \mathcal{O}(\frac{q\log q}{\log y}).$$

Reste à vérifier que les hypothèses du théorème 4 impliquent bien les conditions (6).
On suppose $q^{\frac{1}{2}+\varepsilon}\log q \le K\log y$ (avec $K>0$ et $\varepsilon>0$). Soit $q>1$, $m|q$, $\chi \bmod m$, $\chi \ne \chi_0$.
D'après la minoration (non effective) de $L(1,\chi)$ due à Siegel, on a:

$$|L(1,\chi)| \ge C(\varepsilon)m^{-\varepsilon} \ge C(\varepsilon)q^{-\varepsilon} \ge \frac{C(\varepsilon)}{K}\frac{\sqrt{q}\log q}{\log y} \ge \frac{C(\varepsilon)}{K}\frac{\sqrt{m}\log m}{\log y}.$$

Les conditions (6) sont donc vérifiées.

5. Le cas $f = \mu$

Si on pose $E_\mu(x,y;\theta) = \sum_{\substack{n\le x\\ P(n)<y}}\mu(n)e(n\theta)$, on trouve comme précédemment:

$$E_\mu(x,y;\theta) = \sum_{b=1}^{q} e(\frac{ab}{q}) \sum_{\substack{k\le \frac{x}{(b,q)}\\ P(k)\le y\\ k\equiv \frac{b}{(b,q)} \bmod \frac{q}{(b,q)}}} \mu(k(b,q))$$

pour $y \leq q$. Comme μ ne charge que les nombres sans facteur carré, cela donne:

$$E_\mu(x,y;\theta) = \sum_{b=1}^{q} e(\frac{ab}{q})\mu((b,q)) \sum_{\substack{k \leq \frac{x}{(b,q)} \\ P(k) \leq y \\ k \equiv \frac{b}{(b,q)} \bmod \frac{q}{(b,q)} \\ (k,(b,q))=1}} \mu(k)$$

En posant $m = \frac{q}{(b,q)}$ et $c = \frac{b}{(b,q)}$, on obtient:

$$E_\mu(x,y;\theta) = \sum_{m|q} \sum_{\substack{c=1 \\ (c,m)=1}}^{m} e(\frac{ac}{m})\mu(\frac{q}{m}) \sum_{\substack{k \leq \frac{mx}{q} \\ P(k) < y \\ k \equiv c \bmod m \\ (k, \frac{q}{m})=1}} \mu(k)$$

soit, en utilisant l'orthogonalité des caractères:

$$E_\mu(x,y;\theta) = \sum_{m|q} \mu(\frac{q}{m}) \sum_{\substack{c=1 \\ (c,m)=1}}^{m} e(\frac{ac}{m}) \sum_{\substack{k \leq \frac{mx}{q} \\ P(k) < y \\ (k, \frac{q}{m})=1}} \frac{1}{\phi(m)} \sum_{\chi \bmod m} \overline{\chi}(c)\chi(k)\mu(k)$$

ce qui s'écrit, en notant χ_k le caractère principal modulo k:

$$E_\mu(x,y;\theta) = \sum_{m|q} \frac{1}{\phi(m)} \mu(\frac{q}{m}) \sum_{\substack{c=1 \\ (c,m)=1}}^{m} e(\frac{ac}{m}) \sum_{\chi \bmod m} \overline{\chi}(c) \sum_{\substack{k \leq \frac{mx}{q} \\ P(k) < y}} (\chi\chi_{\frac{q}{m}}\mu)(k)$$

On en déduit, comme dans le cas $f = \mathbf{1}$:

$$\sum_{\substack{n=1 \\ P(n) \leq y}}^{+\infty} \frac{e(n\theta)}{n}\mu(n) = \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2} E_\mu(x,y;\theta)$$

$$= \frac{1}{q} \sum_{m|q} \frac{m}{\phi(m)} \mu(\frac{q}{m}) \sum_{\chi \bmod m} \tau(\overline{\chi})\chi(a) \sum_{\substack{k=1 \\ P(k) \leq y}}^{+\infty} \frac{(\chi\chi_{\frac{q}{m}}\mu)(k)}{k}$$

Le même calcul, sans la condition $P(n) \leq y$, donne:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{e(n\theta)}{n}\mu(n) = \frac{1}{q} \sum_{m|q} \frac{m}{\phi(m)} \mu(\frac{q}{m}) \sum_{\chi \bmod m} \tau(\overline{\chi})\chi(a) \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(\chi\chi_{\frac{q}{m}}\mu)(k)}{k}$$

avec, pour tout caractère χ:

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(\chi\mu)(k)}{k} = \frac{1}{L(1,\chi)} \quad (= 0 \text{ par convention si } \chi \text{ est principal})$$

– Si χ n'est pas principal, on a:

$$\log \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(\chi\mu)(k)}{k} - \log \sum_{\substack{k=1 \\ P(k) \leq y}}^{+\infty} \frac{(\chi\mu)(k)}{k} = \log \prod_p \left(1 - \frac{\chi(p)}{p}\right) - \log \prod_{p \leq y} \left(1 - \frac{\chi(p)}{p}\right)$$

$$= \sum_{p>y} \log\left(1 - \frac{\chi(p)}{p}\right) = -\sum_{p>y} \frac{\chi(p)}{p} + \mathcal{O}(\frac{1}{y})$$

d'où, en utilisant le lemme 6 comme dans le cas de $f = \mathbf{1}$:

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(\chi\mu)(k)}{k} - \sum_{\substack{k=1 \\ P(k)<y}}^{+\infty} \frac{(\chi\mu)(k)}{k} = \mathcal{O}(\frac{q \log q}{\log y})$$

à condition de supposer (6).

– Si χ modulo m est principal, la formule de Mertens donne immédiatement:

$$\sum_{\substack{k=1 \\ P(k)<y}}^{+\infty} \frac{(\chi\mu)(k)}{k} = \prod_{p \leq y} \left(1 - \frac{\chi(p)}{p}\right) = \prod_{p|m} \left(1 - \frac{1}{p}\right)^{-1} \prod_{p \leq y} \left(1 - \frac{1}{p}\right) = \mathcal{O}(\frac{\log q}{\log y})$$

Sous les hypothèses du théorème 5, les conditions (6) sont à nouveau vérifiées et on déduit de ce qui précède:

$$\sum_{\substack{n=1 \\ P(n)<y}}^{+\infty} \frac{e(n\theta)}{n} \mu(n) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{e(n\theta)}{n} \mu(n) + \mathcal{O}(\frac{q \log q}{\log y})$$

ou bien, en utilisant une dernière fois l'orthogonalité des caractères:

$$\sum_{\substack{n=1 \\ P(n)<y}}^{+\infty} \frac{e(n\theta)}{n} \mu(n) = \frac{1}{\phi(q)} \sum_{b=1}^{q} e(\frac{ab}{q}) \sum_{\chi \bmod q} \frac{\overline{\chi}(b)}{L(1,\chi)} + \mathcal{O}(\frac{q \log q}{\log y})$$

Références

[1] H. Daboussi & H. Delange, *Quelques propriétés des fonctions multiplicatives de module au plus égal à 1*, C.R. Acad. Sci. Paris, Sér. A, **278** (1974), 657-660.

[2] H. Delange, *Sur les fonctions arithmétiques multiplicatives de module* ≤ 1, Acta arithmetica, **42** (1983), 121-151.

[3] E. Fouvry & G. Tenenbaum, *Entiers sans grand facteur premier en progressions arithmétiques*, Proc. London Math. Soc., (3) **63** (1991), 449-494.

[4] G. Halász, *Über die Mittelwerte multiplikativer zahlentheorischer Funktionen*, Acta Math. Acad. Sci. Hung., **19** (1968), 365-403.

[5] H. Halberstam & H. E. Richert, *Sieve methods*, Academic Press, London, New-York, San Francisco (1974).

[6] J.L. Mauclaire, *Intégration et théorie des nombres*, Hermann, Paris (1986).

[7] H.L. Montgomery & R.C. Vaughan, *On exponential sums with multiplicative coefficients*, Inventiones Math., **43** (1977), 69-82.

[8] G. Tenenbaum, Lettre à H. Daboussi.

[9] G. Tenenbaum, *Introduction à la théorie analytique et probabiliste des nombres*, Publications de l'Institut Élie Cartan, Nancy (1990).

Chapitre 2

Sommes d'exponentielles et principe de l'hyperbole

à paraître dans la revue
Acta Arithmetica

1. Introduction

– Beaucoup de problèmes d'arithmétique sont liés à des questions d'indépendance entre les structures multiplicative et additive des entiers. L'étude du comportement asymptotique des sommes d'exponentielles de la forme

$$\sum_{n\leq x} f(n)e(n\theta), \tag{7}$$

où f est une fonction multiplicative et $e(n\theta) := \exp(2i\pi n\theta)$ est additive, permet d'obtenir des renseignements intéressants sur cette «indépendance». Il est alors naturel de se demander pour quel type de fonction multiplicative f on a, pour tout irrationnel θ:

$$\sum_{n\leq x} f(n)e(n\theta) = o\Big(\sum_{n\leq x} f(n)\Big). \tag{8}$$

On notera $\mathcal{D}$ l'ensemble de ces fonctions et $\mathcal{M}$ l'ensemble des fonctions multiplicatives.

– Dans le cas des fonctions multiplicatives à valeurs dans le disque unité, on dispose du résultat suivant, dû à H. Daboussi (cf [3], [4] ou [11] page 392):

Théorème A. (Daboussi) *Pour tout θ irrationnel on a, uniformément pour f multiplicative à valeurs dans le disque unité:*

$$\sum_{n\leq x} f(n)e(n\theta) = o(x). \tag{9}$$

Or on sait d'après un théorème de H. Delange ([6]) que si f est multiplicative à valeurs dans le disque unité, elle admet une valeur moyenne non nulle si et seulement si les deux conditions suivantes sont vérifiées: $\begin{cases} \sum_p \frac{1-f(p)}{p} \text{ converge} \\ \exists k \geq 1, f(2^k) \neq -1 \end{cases}$

On obtient ainsi une première classe de fonctions qui vérifient (8):

$$\{f \in \mathcal{M},\ |f| \leq 1,\ \sum_p \frac{1-f(p)}{p} \text{ converge},\ \exists k \geq 1, f(2^k) \neq -1\} \subset \mathcal{D}.$$

Plus généralement, K.H. Indlekofer ([9]) a obtenu (9) en supposant seulement que f est *uniformément sommable*.

Définition: Une fonction arithmétique f est dite uniformément sommable si on a:

$$\lim_{y\to+\infty}\Big(\sup_{x\geq 1}\frac{1}{x}\sum_{\substack{n\leq x\\ |f(n)|\geq y}}|f(n)|\Big)=0.$$

On notera $\mathcal{L}^*$ l'ensemble des fonctions multiplicatives uniformément sommables.

Indlekofer a montré ([9]) que les fonctions de $\mathcal{L}^*$ qui ont une valeur moyenne non nulle sont caractérisées par les propriétés suivantes: $\begin{cases}\sum\limits_p \frac{f(p)-1}{p} \text{ converge}\\ \sum\limits_{\substack{p\\ |f(p)|\leq\frac{3}{2}}}\frac{|f(p)-1|^2}{p}<+\infty\\ \sum\limits_{\substack{p\\ |f(p)-1|\geq\frac{1}{2}}}\frac{|f(p)|}{p}<+\infty\\ \sum\limits_p\sum\limits_{k\geq 2}\frac{|f(p^k)|}{p^k}<+\infty\\ \forall p, 1+\sum\limits_{k=1}^{+\infty}\frac{f(p^k)}{p^k}\neq 0\end{cases}$

On obtient ainsi une nouvelle classe de fonctions contenue dans $\mathcal{D}$.

– En utilisant le principe de l'hyperbole de Dirichlet, Chowla ([1]) a montré que la fonction d (nombre de diviseurs) est aussi dans $\mathcal{D}$:

Théorème B. (Chowla) *Pour tout θ irrationnel, on a:*

$$\sum_{n\leq x}d(n)e(n\theta)=o(x\log x). \tag{10}$$

En fait, Erdös ([8]) a montré qu'en général, on peut obtenir une majoration bien meilleure:

Théorème C. (Erdös) *Pour presque tout θ, on a:*

$$\sum_{n\leq x}d(n)e(n\theta)=\mathcal{O}(\sqrt{x}\log x).$$

– Par ailleurs Y. Dupain, R.R. Hall et G. Tenenbaum ([7]) ont montré que les fonctions y^{Ω} sont dans la classe $\mathcal{D}$ lorsque $0<y<2$ (ici $\Omega(n)$ désigne le nombre de facteurs premiers de n comptés avec multiplicité):

Théorème D. (Dupain, Hall, Tenenbaum) *Si $0<y<2$, on a pour tout θ irrationnel:*

$$\sum_{n\leq x}y^{\Omega(n)}e(n\theta)=o\Big(\sum_{n\leq x}y^{\Omega(n)}\Big). \tag{11}$$

Leur démonstration – de nature analytique – s'appuie entre autres sur une estimation du type «Siegel-Walfisz» du comportement de y^{Ω} dans les progressions arithmétiques de raison «petite» .

– Dans ce qui précède, les fonctions multiplicatives considérées sont à valeurs réelles positives. Pour des fonctions f plus générales, seuls des résultats du type (9) semblent accessibles.

Dans cette direction, H. Daboussi (cf [2]) a généralisé (11) de la façon suivante:

Théorème E. (Daboussi) *Soit f une fonction complètement multiplicative telle que*

pour tout nombre premier p on ait $|f(p)| = y$, avec $0 < y < 2$.
Alors pour tout θ irrationnel on a:

$$\sum_{n\leq x} f(n)e(n\theta) = o\Big(\sum_{n\leq x} |f(n)|\Big).$$

2. Résultats

– Le premier objectif de cet article est d'obtenir un résultat de stabilité de la classe $\mathcal{D}$ par convolution. On montrera le résultat général suivant:

Théorème 1. *Soient f et h deux fonctions multiplicatives telles que:*
(H1) $\sum_p \frac{h(p)-1}{p}$, $\sum_{\substack{p\\ |h(p)|\leq \frac{3}{2}}} \frac{|h(p)-1|^2}{p}$, $\sum_{\substack{p\\ |h(p)-1|\geq \frac{1}{2}}} \frac{|h(p)|}{p}$ *et* $\sum_p \sum_{k\geq 2} \frac{|h(p^k)|}{p^k}$
convergent.
(H2) $\forall p,\ 1 + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{h(p^k)}{p^k} \neq 0$
(F1) $f \geq 0$
(F2) $\sum_{n\leq x} f(n) = o(x \sum_{n\leq x} \frac{f(n)}{n})$
(F3) $f \in \mathcal{D}$.
Alors, si on pose $g := f * h$, on a: $g \in \mathcal{D}$.

Dans la pratique, on utilisera souvent des hypothèses plus faibles:

Corollaire 1. *Soient f et h deux fonctions multiplicatives telles que:*
(H'1) $|h| \leq 1$ *et* $\sum_p \frac{1-h(p)}{p}$ *converge.*
(H'2) $\exists k \geq 1,\ h(2^k) \neq -1$.
(F1) $f \geq 0$
(F2) $\sum_{n\leq x} f(n) = o(x \sum_{n\leq x} \frac{f(n)}{n})$.
(F3) $f \in \mathcal{D}$.
Alors, si on pose $g := f * h$, on a: $g \in \mathcal{D}$.

En particulier, $h = \mathbf{1}$ convient, ce qui donne:

Corollaire 2. *Soit f une fonction multiplicative telle que:*
(F1) $f \geq 0$.
(F2) $\sum_{n\leq x} f(n) = o(x \sum_{n\leq x} \frac{f(n)}{n})$.
On suppose que: $f \in \mathcal{D}$.
Alors, si on pose $g := f * \mathbf{1}$, on a $g \in \mathcal{D}$.

On sait (voir par exemple [11] page 340) que la condition (F2) est vérifiée dès qu'il existe des constantes $\lambda_1 > 0$ et $0 \leq \lambda_2 < 2$ telles que:

$$\forall p \text{ premier},\ \forall k \geq 1,\ 0 \leq f(p^k) \leq \lambda_1 \lambda_2^{k-1}.$$

– Considérons les fonctions diviseurs généralisées d_l ($l \in \mathbf{N}^*$), où $d_l(n)$ est le nombre de manières de décomposer n en produit de l entiers non nuls.
En remarquant que

$$\sum_{n\leq x} d_l(n) \sim \frac{1}{(l-1)!} x(\log x)^{l-1}$$

et

$$x\sum_{n\le x}\frac{d_l(n)}{n}\sim\frac{1}{(l-1)!}x(\log x)^l,$$

on constate que $f=d_l$ entre dans le champ d'application du corollaire 2. On voit donc que si d_l est dans $\mathcal{D}$, alors d_{l+1} aussi. Comme d_1 est évidemment dans $\mathcal{D}$, on en déduit:

Corollaire 3. *Pour tout $l\in\mathbf{N}^*$ et tout θ irrationnel, on a:*

$$\sum_{n\le x}d_l(n)e(n\theta)=o\Big(\sum_{n\le x}d_l(n)\Big)=o\big(x(\log x)^{l-1}\big).$$

Remarquons que cette assertion peut également se déduire des résultats de [7]. En effet, la méthode employée par Dupain, Hall et Tenenbaum dans cet article pour établir (11) fonctionne sans changement (cf la remarque page 406) dans le cas de $\omega(n)$ et fournit:

$$\sum_{n\le x}y^{\omega(n)}e(n\theta)=o\big(x(\log x)^{y-1}\big)\qquad\qquad(\theta\in\mathbf{R}\setminus\mathbf{Q},\quad \mathbf{y>0}).$$

Si on considère la fonction d_y, définie par:

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{d_y(n)}{n^s}=\zeta(s)^y\qquad\qquad(\Re e\ s>1),$$

on peut écrire $d_y=y^\omega*h$, avec:

$$\sum_{m=1}^{+\infty}\frac{|h(m)|}{m^{\frac{2}{3}}}<+\infty,$$

ce qui permet de conclure que d_y est dans $\mathcal{D}$ pour tout $y>0$.
L'intérêt est ici d'avoir obtenu le corollaire 3 par des moyens élémentaires, sans faire appel à des estimations du type «Siegel-Walfisz».

– En combinant le théorème E – dont la démonstration utilise (11) –, et le principe mis en évidence de stabilité de la classe $\mathcal{D}$, on montrera ensuite le résultat suivant:

Théorème 2. *Soit $y>0$. On suppose que f, multiplicative, vérifie les conditions:*

(i) $|f(p)|\le y$ pour tout nombre premier p,

(ii) La série $\sum_p\sum_{\nu=2}^{+\infty}\frac{|f(p^\nu)|}{p^\nu}(\log p^\nu)^{max(1-y,0)}$ converge.

Alors pour tout θ irrationnel, on a:

$$\sum_{n\le x}f(n)e(n\theta)=o\big(x(\log x)^{y-1}\big).$$

On voit facilement que ce résultat contient les théorèmes A, B, D, E et le corollaire 3, ainsi que le fait que y^ω et d_y sont dans $\mathcal{D}$ pour $y>0$.
Dans le cas où $0<y<2$, le théorème 2 découle assez facilement du théorème E, par un argument de convolution. Un examen attentif de la démonstration dans [2] montre que la preuve du théorème E – en son état actuel – n'est transposable à la situation d'une fonction multiplicative générale satisfaisant

les conditions (i) et (ii) que lorsque $0 < y < 2$. En effet le résultat provient, en dernier ressort, du fait que la quantité

$$\prod_{p\le T}\Big(1-\frac{1}{p}\Big)^{2y}\Big(1+\frac{y^2}{p}\Big)$$

tend vers 0 quand T tend vers $+\infty$, ce qui n'est vrai que pour $y < 2$.
C'est pourquoi dans le cas général, on emploiera une méthode analogue à celle de la démonstration du théorème 1, reposant sur la stabilité par convolution du comportement des sommes d'exponentielles mises en jeu.

– Le théorème 2 ne donne un renseignement non trivial que si

$$\sum_p \frac{y-|f(p)|}{p} < +\infty.$$

Sous cette hypothèse supplémentaire, le résultat peut s'écrire de la façon suivante:

Corollaire 4. *Soit $y > 0$. On suppose que f, multiplicative, vérifie les conditions:*

(i) $|f(p)| \le y$ pour tout nombre premier p,

(ii) La série $\sum_p \sum_{\nu=2}^{+\infty} \frac{|f(p^\nu)|}{p^\nu}(\log p^\nu)^{max(1-y,0)}$ converge,

(iii) La série $\sum_p \frac{y-|f(p)|}{p}$ converge.

Alors pour tout θ irrationnel, on a:

$$\sum_{n\le x} f(n)e(n\theta) = o\Big(\sum_{n\le x}|f(n)|\Big).$$

– Par ailleurs, on ne peut pas supprimer la condition

$$\sum_p \sum_{\nu=2}^{+\infty} \frac{|f(p^\nu)|}{p^\nu}(\log p^\nu)^{max(1-y,0)} < +\infty$$

du corollaire 4. Ainsi, on montrera que la fonction multiplicative 2^Ω – qui vérifie les hypothèses (i) et (iii) pour $y = 2$ – n'appartient pas à la classe $\mathcal{D}$:

Théorème 3. *Il existe un irrationnel θ tel que l'on ait, quand x tend vers $+\infty$:*

$$\sum_{n\le x} 2^{\Omega(n)}e(n\theta) = \Omega\Big(\sum_{n\le x} 2^{\Omega(n)}\Big).$$

De même on peut montrer que pour $y \ge 2$, y^Ω n'est pas dans $\mathcal{D}$. On constate donc que la restriction $0 < y < 2$ dans le théorème D est inévitable.

Remerciements: Je tiens à remercier le *referee* anonyme pour des remarques qui ont permis de simplifier certains points – notamment la démonstration du théorème 2 dans le cas $0 < y < 2$ – et de clarifier la démonstration du théorème 1.

3. Démonstration du théorème 1

Pour tout réel θ, et tout $x \geq 1$, on note:

$$G(x,\theta) := \sum_{n\leq x} g(n)e(n\theta).$$

On pose $G(x) := G(x,0)$, dont le comportement peut être relié à celui de f de la manière suivante:

Lemme 1. *Sous les hypothèses du théorème 1, on a:*

$$G(x) \asymp x \sum_{m\leq x} \frac{f(m)}{m}. \tag{12}$$

PREUVE : D'après Indlekofer ([9]), les hypothèses (H1) et (H2) montrent que h est absolument sommable et vérifie, pour un certain $\lambda \in \mathbf{C}^*$:

$$\sum_{n\leq x} h(n) \sim \lambda x. \tag{13}$$

Ensuite, en écrivant

$$\lambda x \sum_{m\leq x} \frac{f(m)}{m} - G(x) = \sum_{m\leq x} f(m)\Big[\frac{\lambda x}{m} - \sum_{l\leq \frac{x}{m}} h(l)\Big],$$

puis en séparant en deux la somme, selon la position de m par rapport à $\frac{x}{K}$, on obtient:

$$\lambda x \sum_{m\leq x} \frac{f(m)}{m} - G(x) \leq \sum_{m\leq \frac{x}{K}} f(m)\Big|\frac{\lambda x}{m} - \sum_{l\leq \frac{x}{m}} h(l)\Big| + \Big(K|\lambda| + \sum_{l\leq K} |h(l)|\Big) \sum_{m\leq x} f(m). \tag{14}$$

Un ε strictement positif étant donné, on peut d'après (13) choisir $K = K(\varepsilon)$ pour que la valeur absolue dans le premier terme soit majorée par $\frac{\varepsilon x}{2m}$. A cause de l'hypothèse (F2), le second terme de (14) est alors majoré par $\frac{\varepsilon x}{2} \sum\limits_{m\leq x} \frac{f(m)}{m}$ pour $x \geq x_0(\varepsilon)$, ce qui fournit le résultat attendu.

a) Cas où $\sum\limits_{m=1}^{+\infty} \frac{f(m)}{m} < +\infty$

En écrivant la somme d'exponentielles sous la forme

$$G(x,\theta) = \sum_{m\leq x} f(m) \sum_{l\leq \frac{x}{m}} h(l)$$

et en séparant en deux termes suivant la position de m par rapport à K, on obtient:

$$|G(x,\theta)| \leq \sum_{m\leq K} f(m)\Big|\sum_{l\leq \frac{x}{m}} h(l)e(lm\theta)\Big| + \sum_{K<m\leq x} f(m)\Big[\sum_{l\leq \frac{x}{m}} |h(l)|\Big]. \tag{15}$$

Du fait que h est uniformément sommable, on déduit facilement que le terme entre crochets et majoré – à une constante près – par $\frac{x}{m}$ (cf [9]).

Si on fixe $\varepsilon > 0$, l'hypothèse supplémentaire faite ici sur f permet de majorer le second terme de (15) par $\frac{\varepsilon x}{2}$, à condition de choisir $K = K(\varepsilon)$ assez grand.

Pour le premier terme, on a vu que h – étant uniformément sommable et de valeur moyenne non nulle – appartient à la classe $\mathcal{D}$. Tous les $m\theta$ étant irrationnels, on en déduit que l'on peut majorer le premier terme par $\frac{\varepsilon x}{2}$ pour $x \geq x_0(\varepsilon)$.

On obtient ainsi:

$$G(x,\theta) = o\big(G(x)\big)$$

car le lemme 1, joint à l'hypothèse faite sur f, donne $G(x) \asymp x$.

b) Cas où $\sum_{m=1}^{+\infty} \frac{f(m)}{m} = +\infty$

D'après Indlekofer ([9]), le fait que h soit uniformément sommable et de valeur moyenne non nulle permet d'en déduire une écriture plus pratique sous la forme d'une convolution:

Lemme 2. *Il existe des fonctions multiplicatives $\tilde{h}$ et ψ et une constante $A > 0$ telles que:*

$$h = \tilde{h} * \psi, \text{ avec } \sum_n \frac{|\psi(n)|}{n} < +\infty \text{ et } \begin{cases} \sum\limits_{n\leq x} |\tilde{h}(n)|^2 \leq A^2 x \\ \forall p, |\tilde{h}(p)| \leq A \end{cases}$$

On notera, de manière analogue à $G(x,\theta)$:

$$\tilde{H}(x,\theta) := \sum_{n\leq x} \tilde{h}(n) e(n\theta).$$

Remarquons que l'inégalité de Cauchy-Schwarz donne immédiatement:

$$\tilde{H}(x,0) \ll x.$$

Les propriétés de $\tilde{h}$ permettent d'obtenir des renseignements intéressants sur son comportement dans les sommes d'exponentielles (cf [10]):

Théorème F. (Montgomery, Vaughan) *Si $|\theta - \frac{a}{q}| \leq \frac{1}{q^2}$, $(a,q) = 1$ et $2 \leq B \leq q \leq \frac{x}{B}$, alors:*

$$\tilde{H}(x,\theta) \ll \frac{x}{\log x} + xB^{-\frac{1}{2}}(\log B)^{\frac{3}{2}}. \tag{16}$$

En utilisant le lemme 2, on peut écrire:

$$G(x,\theta) = \sum_{lm\leq x} \psi(l) f(m) \tilde{H}\Big(\frac{x}{lm}, lm\theta\Big). \tag{17}$$

D'après le lemme 1, il suffit de montrer que pour tout $\varepsilon > 0$ et pour $x \geq x_0(\varepsilon)$, le membre de droite de (17) est

$$\ll \varepsilon x \sum_{m\leq x} \frac{f(m)}{m}.$$

La convergence de la série $\sum_l \frac{|\psi(l)|}{l}$ et la majoration $\tilde{H}(x,0) \ll x$ permettent de supposer $l \leq L$, où $L = L(\varepsilon)$ est choisi assez grand.

L'hypothèse

$$\sum_{m\leq x} f(m) = o\Big(x \sum_{m\leq x} \frac{f(m)}{m}\Big)$$

permet également de restreindre la sommation de (17) au domaine $lm \leq \frac{x}{x_1(\varepsilon)}$ pour toute constante fixée $x_1(\varepsilon)$.

Il reste donc à montrer que pour $y > x_2(\varepsilon)$, on a:

$$\sum_{m \leq \frac{y}{x_1(\varepsilon)}} f(m) \tilde{H}\Big(\frac{y}{m}, m\theta\Big) \ll \varepsilon y \sum_{m \leq y} \frac{f(m)}{m}. \tag{18}$$

Or le résultat de Montgomery et Vaughan implique la propriété suivante:

Pour chaque $\varepsilon > 0$, on a $\tilde{H}(x,\theta) \ll \varepsilon x$ dès que $x > x_1(\varepsilon)$ et

$$\{\theta\} \notin E(\varepsilon) := \bigcup_{q \leq B} \bigcup_{\substack{1 \leq a < q \\ (a,q)=1}} \Big[\frac{a}{q} - \frac{1}{qQ}; \frac{a}{q} + \frac{1}{qQ}\Big],$$

avec $B = \frac{1}{\varepsilon^3}$ et $Q = \lfloor \frac{1}{\varepsilon^4} \rfloor$. On peut prendre par exemple $x_1(\varepsilon) = \exp\big(\frac{1}{\varepsilon}\big)$.

On voit bien que la sous-somme de (18) correspondant à $\{m\theta\} \notin E(\varepsilon)$ est majorée par le membre de droite. Il suffit donc d'évaluer, pour $y > x_2(\varepsilon)$:

$$\sum_{\substack{m < y \\ \{\theta m\} \in E(\varepsilon)}} \frac{f(m)}{m}. \tag{19}$$

Dans ce but, on majore la fonction indicatrice de $E(\varepsilon)$ par le polynôme trigonométrique:

$$C \sum_{q \leq B} \sum_{\substack{1 \leq a < q \\ (a,q)=1}} \Big(\frac{\sin \pi\theta qQ}{qQ \sin\big(\pi\big(\theta - \frac{a}{q}\big)\big)}\Big)^2 = \frac{C}{Q} \sum_{q \leq B} \frac{1}{q} \sum_{\substack{1 \leq a < q \\ (a,q)=1}} \sum_{|k| \leq qQ} \Big(1 - \frac{|k|}{qQ}\Big) \cos\Big(2\pi k\Big(\theta - \frac{a}{q}\Big)\Big),$$

où C est une constante absolue.

On reporte dans (19), et on intervertit les sommations. Comme f est dans $\mathcal{D}$, on voit – par sommation d'Abel – que la contribution de chaque $k \neq 0$ est

$$o\Big(\sum_{m \leq y} \frac{f(m)}{m}\Big).$$

On obtient donc que (19) est

$$\ll \big(\varepsilon + o(1)\big) \sum_{m < y} \frac{f(m)}{m},$$

ce qui fournit bien le résultat attendu.

4. Démonstration du corollaire 1

Il suffit de montrer que les hypothèses (H1) et (H2) de la proposition 2 sont vérifiées.

– D'après (H'2),

$$\exists k \geq 1, \ \ \Re e(h(2^k)) > -1.$$

Donc

$$\Re e \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{h(2^k)}{2^k} > \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{-1}{2^k} = -1.$$

De plus

$$\forall p \geq 3, \ \ \Re e \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{h(p^k)}{p^k} \geq \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{-1}{p^k} = \frac{-1}{p-1} > -1,$$

ce qui donne (H2).

– Pour prouver (H1), on utilise l'identité classique:

$$\forall u \in \mathbf{C}, |\mathbf{u}| \leq \mathbf{1} \Rightarrow |\mathbf{u}-\mathbf{1}|^{\mathbf{2}} \leq \mathbf{2}\Re\mathbf{e}(\mathbf{1}-\mathbf{u}).$$

En particulier

$$\forall p,\ \ |h(p)-1|^2 \leq 2(1-\Re e h(p)).$$

Or par hypothèse

$$\sum_p \frac{1-\Re e h(p)}{p} < +\infty.$$

Donc

$$\sum_p \frac{|h(p)-1|^2}{p} < +\infty.$$

Soit χ la fonction caractéristique des p tels que $|h(p)-1| \geq \frac{1}{2}$.
On a:

$$\chi(p)=1 \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{4} \leq |h(p)-1|^2 \leq 2\Re e(1-h(p)),$$

ce qui donne:

$$\forall p,\ \ \chi(p)|h(p)| \leq 8(1-\Re e h(p)).$$

Or

$$\sum_p \frac{1-\Re e h(p)}{p} < +\infty,$$

donc

$$\sum_{\substack{p \\ |h(p)-1| \geq \frac{1}{2}}} \frac{|h(p)|}{p} = \sum_p \frac{\chi(p)|h(p)|}{p} < +\infty.$$

Enfin

$$\sum_{k\geq 2} \frac{|h(p^k)|}{p^k} \leq \sum_{k\geq 2} \frac{1}{p^k} = \frac{1}{p(p-1)},$$

d'où

$$\sum_p \sum_{k\geq 2} \frac{|h(p^k)|}{p^k} < +\infty.$$

(H1) est donc vraie, ce qui termine la preuve du corollaire.

5. Démonstration du théorème 2

a) Dans le cas $1 \leq y < 2$

Le résultat se déduit du théorème E par convolution.
Soit g une fonction vérifiant les hypothèses du théorème 2. On peut supposer

$$\sum_p \frac{y-|g(p)|}{p} < +\infty,$$

car sinon on a directement, pour tout θ:

$$|G(x,\theta)| \leq \sum_{n\leq x} |g(n)| = o\big(x(\log x)^{y-1}\big).$$

Définissons une fonction f complètement multiplicative de la manière suivante:

– Si $g(p) = r_p e^{i\theta_p}$, avec $0 < r_p \leq y$, on pose $f(p) = y e^{i\theta_p}$.

– Si $g(p)=0$, on pose $f(p)=ye^{i\theta_p}$, avec θ_p quelconque.

On peut écrire $g=f*h$, les séries entières correspondantes vérifiant:

$$\forall z,\ |z|<1,\ \sum_{\nu=0}^{+\infty} g(p^\nu)z^\nu=\Big(\sum_{\nu=0}^{+\infty} f(p^\nu)z^\nu\Big)\Big(\sum_{\nu=0}^{+\infty} h(p^\nu)z^\nu\Big),$$

d'où, puisque f est complètement multiplicative:

$$\sum_{\nu=0}^{+\infty} h(p^\nu)z^\nu=\big(1-f(p)z\big)\sum_{\nu=0}^{+\infty} g(p^\nu)z^\nu.$$

Donc on a pour tout $\nu\geq 1$:

$$h(p^\nu)=g(p^\nu)-f(p)g(p^{\nu-1}).$$

En particulier, d'après la définition de f, on a:

$$|h(p)|=|g(p)-f(p)|=y-|g(p)|.$$

On en déduit:

$$\sum_{\nu=1}^{+\infty}\frac{|h(p^\nu)|}{p^\nu}=\frac{y-|g(p)|}{p}+\sum_{\nu\geq 2}\frac{|g(p^\nu)-f(p)g(p^{\nu-1})|}{p^\nu}\ll\frac{y-|g(p)|}{p}+\sum_{\nu\geq 2}\frac{|g(p^\nu)|}{p^\nu}+\frac{1}{p^2}.$$

Par conséquent, comme on a supposé

$$\sum_p\frac{y-|g(p)|}{p}<+\infty,$$

on obtient, en utilisant également l'hypothèse (ii):

$$\sum_p\sum_{\nu\geq 1}\frac{|h(p^\nu)|}{p^\nu}<+\infty,$$

puis

$$\sum_{m=1}^{+\infty}\frac{|h(m)|}{m}<+\infty.$$

On peut donc écrire, pour tout K:

$$G(x,\theta)=\sum_{m\leq K}h(m)\sum_{l\leq\frac{x}{m}}f(l)e(lm\theta)+\sum_{m>K}h(m)\sum_{l\leq\frac{x}{m}}f(l)e(lm\theta).\qquad(20)$$

Soit $\varepsilon>0$ fixé.

Dans le second terme, la somme intérieure est majorée par $\frac{x}{m}(\log x)^{y-1}$, car $|f|=y^\Omega$ avec $0<y<2$, si bien que le second terme est majoré par $\frac{\varepsilon}{2}x(\log x)^{y-1}$, à condition de choisir $K=K(\varepsilon)$ assez grand.

Dans le premier terme, pour chaque $m\leq K$, on peut appliquer le théorème E à la somme intérieure, ce qui donne à nouveau – en choisissant $x\geq x_0(\varepsilon)$ – un terme majoré par $\frac{\varepsilon}{2}x(\log x)^{y-1}$.

Le théorème 2 est ainsi démontré dans le cas où $0<y<2$.

b) Dans le cas $0 < y < 1$

La démonstration précédente est presque identique. Dans le second terme de (20), la somme intérieure est majorée par $\frac{x}{m}\big(\log\frac{2x}{m}\big)^{y-1}$ et la condition (ii) du théorème assure que pour $K = K(\varepsilon)$ assez grand et $x \geq x_1(\varepsilon)$:

$$\sum_{K<m\leq x} \frac{|h(m)|}{m}\Big(\log\frac{2x}{m}\Big)^{y-1} \leq \frac{\varepsilon}{2}x(\log x)^{y-1}.$$

c) Dans le cas général

En utilisant la même méthode que dans la démonstration du théorème 1, on va montrer que si le théorème 2 est vrai pour $y-1$, alors il est également vrai pour y. Ceci, joint à ce qui précède, montrera que le théorème 2 est vrai pour tout $y > 0$.

– Soit donc g une fonction multiplicative vérifiant les hypothèses du théorème 2 pour un certain $y > 1$. Définissons alors les fonctions multiplicatives f et h de la façon suivante:
Si $g(p) = yu_p$, avec $|u_p| \leq 1$, on pose

$$\forall k \geq 0,\ \begin{cases} f(p^k) = d_{y-1}(p^k)u_p^k \\ h(p^k) = u_p^k \end{cases}$$

On peut alors écrire $g = f{*}h{*}\psi$, avec, en ce qui concerne les séries entières:

$$\forall z,\ |z| < 1,\ \sum_{\nu=0}^{+\infty} g(p^\nu)z^\nu = \frac{1}{(1-u_pz)^{y-1}}\frac{1}{1-u_pz}\sum_{\nu=0}^{+\infty}\psi(p^\nu)z^\nu.$$

Donc

$$\sum_{\nu=0}^{+\infty}\psi(p^\nu)z^\nu = (1-u_pz)^y\sum_{\nu=0}^{+\infty} g(p^\nu)z^\nu.$$

On obtient ainsi:

$$\forall k \geq 0,\ \ \psi(p^k) = \sum_{\nu=0}^{k}(-u_p)^\nu\binom{y}{\nu}g(p^{k-\nu}),$$

avec, comme $y > 0$:

$$\Big|\binom{y}{\nu}\Big| = \Big|\frac{y(y-1)\dots(y-\nu+1)}{\nu!}\Big| \leq \frac{y(y+1)\dots(y+\nu-1)}{\nu!} = d_y(p^\nu).$$

En tenant compte du fait que $\psi(p) = 0$, on trouve:

$$\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{|\psi(p^k)|}{p^k} \leq \sum_{k=2}^{+\infty}\frac{1}{p^k}\sum_{\nu=0}^{k} d_y(p^\nu)|g(p^{k-\nu})| \leq \sum_{k=2}^{+\infty}\frac{d_y(p^{k-1})y + d_y(p^k)}{p^k} + \sum_{\nu=2}^{+\infty}\frac{|g(p^\nu)|}{p^\nu}\sum_{k\geq 0}\frac{d_y(p^k)}{p^k}$$

après avoir changé ν en $k-\nu$ dans le second terme.
Comme $\sum\limits_{k\geq 0}\frac{d_y(p^k)}{p^k} = \big(1-\frac{1}{p}\big)^{-y}$ est borné, on obtient finalement, grâce à l'hypothèse (ii):

$$\sum_p\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{|\psi(p^k)|}{p^k} < +\infty,$$

puis

$$\sum_{m=1}^{+\infty}\frac{|\psi(m)|}{m} < +\infty.$$

Il en résulte qu'il suffit de montrer le résultat du théorème pour $f{*}h$.

– Posons donc:

$$S(x,\theta) := \sum_{n\le x}(f*h)(n)e(n\theta).$$

On veut montrer que pour θ irrationnel, on a:

$$S(x,\theta) = o\big(x(\log x)^{y-1}\big).$$

Procédons comme dans la démonstration du théorème 1. Comme h est de module au plus 1, on peut prendre $\tilde{h} = h$ dans le lemme 2. On écrit ainsi:

$$S(x,\theta) = \sum_{m\le x} f(m)H\Big(\frac{x}{m},m\theta\Big), \tag{21}$$

où H est défini comme $\tilde{H}$. Comme on a:

$$\sum_{m\le x}|f(m)| \le \sum_{m\le x} d_{y-1}(m) = o\big(x(\log x)^{y-1}\big),$$

on peut restreindre la sommation de (21) au domaine $m \le \frac{x}{x_1(\varepsilon)}$ pour toute constante fixée $x_1(\varepsilon)$.
Il reste donc à montrer que, pour $z \ge x_2(\varepsilon)$:

$$\sum_{m\le \frac{z}{x_1(\varepsilon)}} f(m)H\Big(\frac{z}{m},m\theta\Big) \ll \varepsilon z\big(\log z\big)^{y-1}. \tag{22}$$

En définissant $E(\varepsilon)$ de la même façon que dans la preuve du théorème 1, on obtient de manière analogue que la sous-somme de (22) correspondant à $\{m\theta\} \notin E(\varepsilon)$ est majorée par le membre de droite.
Pour évaluer, pour $z \ge x_2(\varepsilon)$, la somme

$$\sum_{\substack{m\le z\\ \{\theta m\}\in E(\varepsilon)}} \frac{|f(m)|}{m}. \tag{23}$$

on majore à nouveau la fonction indicatrice de $E(\varepsilon)$ par le polynôme trigonométrique

$$\frac{C}{Q}\sum_{q\le B}\frac{1}{q}\sum_{\substack{1\le a<q\\(a,q)=1}}\sum_{|k|\le qQ}\Big(1-\frac{|k|}{qQ}\Big)\cos\Big(2\pi k\Big(\theta-\frac{a}{q}\Big)\Big),$$

puis on reporte dans (23) et on intervertit les sommations.
Comme $|f|$ vérifie les hypothèses du théorème 2, que l'on a supposé vrai pour $y-1$, la contribution de chaque $k \ne 0$ est, par sommation d'Abel:

$$0\big(x(\log x)^{y-1}\big).$$

On obtient donc que (23) est

$$\ll \big(\varepsilon + o(1)\big)(\log x)^{y-1},$$

ce qui termine la démonstration.

6. Démonstration du corollaire 4

Ecrivons $|f| = d_y * \psi$. Les séries entières correspondant à ces fonctions multiplicatives vérifient:

$$\forall z,\ |z|<1,\ \sum_{\nu=0}^{+\infty} |f(p^\nu)| z^\nu = (1-z)^{-y} = \sum_{\nu=0}^{+\infty} \psi(p^\nu) z^\nu.$$

On en déduit facilement, pour tout k entier:

$$\psi(p^k) = \sum_{\nu=0}^{k} (-1)^\nu \binom{y}{\nu} |f(p^{k-\nu})|,$$

d'où:

$$|\psi(p^k)| \leq \sum_{\nu=0}^{k} d_y(p^\nu) |f(p^{k-\nu})|.$$

En tenant compte de la relation $\psi(p) = |f(p)| - y$, on trouve ainsi:

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{|\psi(p^k)|}{p^k} \leq \frac{y-|f(p)|}{p} + \sum_{k\geq 2} \frac{1}{p^k} \sum_{\nu=0}^{k} d_y(p^\nu) |f(p^{k-\nu})|,$$

$$\ll \frac{y-|f(p)|}{p} + \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{d_y(p^k)}{p^k} + \sum_{\nu=2}^{+\infty} \frac{|f(p^\nu)|}{p^\nu},$$

d'où, grâce aux hypothèses (ii) et (iii):

$$\sum_p \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{|\psi(p^k)|}{p^k} < +\infty,$$

et enfin:

$$\sum_{m=1}^{+\infty} \frac{|\psi(m)|}{m} < +\infty.$$

On en déduit facilement que:

$$\sum_{n\leq x} |f(n)| \sim x (\log x)^{y-1},$$

d'où le corollaire annoncé.

7. Démonstration du théorème 3

Dans ce qui suit, on aura besoin de l'ordre moyen de la fonction 2^Ω. Pour la commodité du lecteur, nous rappellerons comment on peut l'obtenir, en procédant par convolution à partir de l'ordre moyen de la fonction d.

a) Identités de convolution

Comme on a affaire à des fonctions multiplicatives, il suffit de vérifier ces identités sur les puissances de nombres premiers.

Lemme 3. *On a $2^\Omega = h*f$, où h et f, multiplicatives, sont définies respectivement par:*

$$\begin{cases} \forall k\geq 1, h(2^k) = 0 \\ \forall p\neq 2, \forall k\geq 0, h(p^k) = 2^k \end{cases} \quad et \quad f(n) = \begin{cases} n & si\ \exists k\geq 0, n = 2^k \\ 0 & sinon \end{cases}$$

PREUVE :

– Soit $p \neq 2$ et $k \geq 0$.

$$(h * f)(p^k) = \sum_{\nu=0}^{k} \underbrace{f(p^\nu)}_{=0 \text{ si } \nu \neq 0} h(p^{k-\nu}) = h(p^k) = 2^k = 2^{\Omega(p^k)}.$$

– Prenons $k \geq 0$. On a:

$$(h * f)(2^k) = \sum_{\nu=0}^{k} \underbrace{h(2^\nu)}_{=0 \text{ si } \nu > 0} f(2^{k-\nu}) = f(2^k) = 2^k = 2^{\Omega(2^k)}.$$

Lemme 4. *On a $h = d * g$, où g, multiplicative, est définie par:*

$$\forall p \neq 2, g(p^k) = \begin{cases} 2^{k-2} & si\ k \geq 2 \\ 0 & si\ k = 1 \end{cases} \quad et \quad g(2^k) = \begin{cases} 0 & si\ k \geq 3 \\ 1 & si\ k = 2 \\ -2 & si\ k = 1 \end{cases}$$

PREUVE :

– Soit $p \neq 2$ et $k \geq 2$.

$$(d*g)(p^k) = \sum_{\nu=0}^{k} g(p^\nu) d(p^{k-\nu}) = (k+1) + \sum_{\nu=2}^{k} 2^{\nu-2}(k-\nu+1) = (k+1) + \sum_{\nu=2}^{k} 2^{\nu-2} \sum_{i=0}^{k-\nu} 1$$

$$= (k+1) + \sum_{i=0}^{k-2} \sum_{\nu=2}^{k-i} 2^{\nu-2} = (k+1) + \sum_{i=0}^{k-2} (2^{k-i-1} - 1) = 1 + \sum_{i=0}^{k-1} 2^i = 2^k = h(p^k).$$

– Pour $p \neq 2$ et $k = 1$, on a:

$$(d * g)(p) = 2 = h(p).$$

– Pour $p = 2$ et $k \geq 2$, on a:

$$(d * g)(2^k) = \sum_{\nu=0}^{k} g(2^\nu) d(2^{k-\nu}) = (k+1) - 2k + (k-1) = 0 = h(2^k).$$

– Pour $p = 2$ et $k = 1$, on a:

$$(d * g)(2) = 0 = h(2).$$

b) Ordres moyens

Lemme 5. *Si on pose $C = \prod_{p>2} \left(1 + \frac{1}{p(p-2)}\right)$, on a:*

$$\sum_{n \leq x} h(n) = \frac{1}{4} C x \log x + \mathcal{O}(x).$$

PREUVE :

– D'après le lemme 4, on a:

$$\sum_{n \leq x} h(n) = \sum_{k \leq x} g(k) \sum_{l \leq \frac{x}{k}} d(l) = \sum_{k \leq x} g(k) \Big(\frac{x}{k} \log \frac{x}{k} + \mathcal{O}\big(\frac{x}{k}\big) \Big),$$

soit:

$$\sum_{n \leq x} h(n) = x \log x \sum_{k \leq x} \frac{g(k)}{k} - x \sum_{k \leq x} \frac{g(k) \log k}{k} + \mathcal{O}\Big(x \sum_{k \leq x} \frac{|g(k)|}{k} \Big). \qquad (24)$$

– Pour tout α réel, on a:

$$\sum_{k\leq x}\frac{|g(k)|}{k^\alpha}\leq\prod_{p\leq x}\Big(\sum_{\nu\geq 0}\frac{|g(p^\nu)|}{p^{\alpha\nu}}\Big).$$

La série $\sum\limits_{\nu}\frac{|g(p^\nu)|}{p^{\alpha\nu}}$ dès que α est tel que $3^\alpha>2$ (pour $p=2$, il n'y a qu'un nombre fini de termes non nuls dans la série). Pour $\alpha>\frac{\log 2}{\log 3}$, on obtient ainsi:

$$\sum_{k\leq x}\frac{|g(k)|}{k^\alpha}\ll\prod_{2<p\leq x}\Big(1+\sum_{\nu\geq 2}\frac{2^{\nu-2}}{p^{\alpha\nu}}\Big)=\prod_{2<p\leq x}\Big(1+\frac{1}{p^\alpha(p^\alpha-2)}\Big),$$

ce qui montre que la série $\sum\frac{g(k)}{k^\alpha}$ converge absolument ($\alpha>\frac{\log 2}{\log 3}\Rightarrow 2\alpha>1$). On peut donc écrire:

$$\sum_{k\leq x}\frac{g(k)}{k}=\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{g(k)}{k}-\sum_{k>x}\frac{g(k)}{k}$$

avec

$$\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{g(k)}{k}=\prod_{p}\Big(\sum_{\nu\geq 0}\frac{g(p^\nu)}{p^\nu}\Big)=\Big(1-\frac{2}{2}+\frac{1}{4}\Big)\prod_{p>2}\Big(1+\frac{1}{p(p-2)}\Big)=\frac{C}{4}.\quad(25)$$

et, en s'inspirant de la méthode de Rankin, et en prenant $\alpha>\frac{\log 2}{\log 3}$:

$$\sum_{k>x}\frac{g(k)}{k}\ll\frac{1}{x^{1-\alpha}}\sum_{k>x}\frac{|g(k)|}{k^\alpha}\ll_\alpha\frac{1}{x^{1-\alpha}}.\quad(26)$$

Par ailleurs, si $\frac{\log 2}{\log 3}<\alpha<1$, on a:

$$\sum_{k\leq x}\frac{g(k)\log k}{k}\ll_\alpha\sum_{k\leq x}\frac{|g(k)|}{k^\alpha}\ll_\alpha 1.\quad(27)$$

– En choisissant α quelconque dans $]\frac{\log 2}{\log 3},1[$ et en reportant (25), (26) et (27) dans (24), on obtient le résultat annoncé.

Lemme 6. *Avec la même constante C que dans le lemme 5, on a:*

$$\sum_{n\leq x}2^{\Omega(n)}=\frac{C}{8\log 2}x(\log x)^2+\mathcal{O}(x\log x).$$

Preuve :

– En utilisant le lemme 3, on peut écrire:

$$\sum_{n\leq x}2^{\Omega(n)}=\sum_{k\leq x}f(k)\sum_{l\leq\frac{x}{k}}h(l),$$

ce qui donne, d'après le lemme 5:

$$\sum_{n\leq x}2^{\Omega(n)}=\sum_{k\leq x}f(k)\Big(\frac{1}{4}C\frac{x}{k}\log\frac{x}{k}+\mathcal{O}\big(\frac{x}{k}\big)\Big)$$

soit:

$$\sum_{n\leq x}2^{\Omega(n)}=\frac{C}{4}x\log x\sum_{k\leq x}\frac{f(k)}{k}-\frac{C}{4}x\sum_{k\leq x}\frac{f(k)\log k}{k}+\mathcal{O}\Big(x\sum_{k\leq x}\frac{f(k)}{k}\Big)$$

– Or on a:

$$\sum_{k\le x}\frac{f(k)}{k}=\sum_{0\le r\le \log_2 x}1=\frac{\log x}{\log 2}+\mathcal{O}(1)$$

et

$$\sum_{k\le x}\frac{f(k)\log k}{k}=\sum_{0\le r\le \log_2 x}\log 2^r=\log 2\,\frac{\lfloor\log_2 x\rfloor(\lfloor\log_2 x\rfloor+1)}{2}$$
$$=\frac{\log 2}{2}\Big(\frac{\log x}{\log 2}+\mathcal{O}(1)\Big)^2=\frac{(\log x)^2}{2\log 2}+\mathcal{O}(\log x).$$

On trouve donc finalement:

$$\sum_{n\le x}2^{\Omega(n)}=\frac{C}{8\log 2}x(\log x)^2+\mathcal{O}(x\log x).$$

c) Minoration de la somme d'exponentielles

Posons $S(x,\theta)=\sum\limits_{n\le x}2^{\Omega(n)}e(n\theta)$. Le principe de l'hyperbole, avec le lemme 3, donne:

$$S(x,\theta)=\sum_{l\le x}f(l)\sum_{k\le\frac{x}{l}}h(k)e(kl\theta)=S_1(\theta)+S_2(\theta)$$

avec

$$S_1(\theta)=\sum_{l\le y}f(l)\sum_{k\le\frac{x}{l}}h(k)e(kl\theta)$$

et

$$S_2(\theta)=\sum_{k\le\frac{x}{y}}h(k)\sum_{y<l\le\frac{x}{k}}f(l)e(lk\theta).$$

– On a tout d'abord:

$$|S_1(\theta)|\le\sum_{l\le y}f(l)\sum_{k\le\frac{x}{l}}h(k),$$

ce qui donne, d'après le lemme 5:

$$S_1(\theta)\ll\sum_{l\le y}f(l)\frac{x}{l}\log x=x\log x\sum_{2^r\le y}1$$

d'où finalement:

$$S_1(\theta)\ll x\log x\log y. \tag{28}$$

– La deuxième somme peut s'écrire sous la forme:

$$S_2(\theta)=T_1(\theta)+T_2(\theta)$$

avec

$$T_1(\theta)=\sum_{\frac{x}{4y}<k\le\frac{x}{y}}h(k)\sum_{y<l\le\frac{x}{k}}f(l)e(lk\theta)$$
$$T_2(\theta)=\sum_{k\le\frac{x}{4y}}h(k)\sum_{2^r\le\frac{x}{k}}2^re(2^rk\theta)$$

– Dans la somme $T_1(\theta)$, comme $\frac{x}{k}<4y$, il y a au plus deux puissances de 2 dans $]y,\frac{x}{k}]$, d'où:

$$|T_1(\theta)|\le\sum_{\frac{x}{4y}<k\le\frac{x}{y}}h(k)\Big(\frac{x}{k}+\frac{x}{2k}\Big)\le 6y\sum_{k\le\frac{x}{y}}h(k),$$

ce qui, grâce au lemme 5, donne:

$$T_1(\theta)\ll x\log x. \tag{29}$$

– Dans $T_2(\theta)$, pour chaque k, ce sont les deux plus grandes valeurs de r qui jouent un rôle prépondérant. On écrit donc $T_2(\theta) = U_1(\theta) + U_2(\theta)$, avec:

$$U_1(\theta) = \sum_{k\leq \frac{x}{4y}} h(k) \sum_{\log_2 y < r < \lfloor \log_2 \frac{x}{k}\rfloor - 1} 2^r e(2^r k\theta)$$

$$U_2(\theta) = \sum_{k\leq \frac{x}{4y}} h(k) 2^{\lfloor \log_2 \frac{x}{k}\rfloor - 1} e(2^{\lfloor \log_2 \frac{x}{k}\rfloor - 1} k\theta)\Big(1 + 2e(2^{\lfloor \log_2 \frac{x}{k}\rfloor - 1} k\theta)\Big)$$

La condition $k \leq \frac{x}{4y}$ assure que l'on a $\lfloor \log_2 \frac{x}{k}\rfloor - 1 > \log_2 y$.

– Une majoration grossière donne:

$$|U_1(\theta)| \leq \sum_{k\leq \frac{x}{4y}} h(k) \sum_{\log_2 y < r < \lfloor \log_2 \frac{x}{k}\rfloor - 1} 2^r \leq \sum_{k\leq \frac{x}{4y}} h(k)\big(2^{\lfloor \log_2 \frac{x}{k}\rfloor - 1} - 1\big) \leq \frac{x}{2}\sum_{k\leq x} \frac{h(k)}{k}$$

Or, en effectuant une sommation par parties, on obtient, avec le lemme 5:

$$\sum_{k\leq x} \frac{h(k)}{k} = \frac{1}{x}\sum_{k\leq x} h(k) + \int_1^x \frac{du}{u^2}\sum_{k\leq u} h(k) = \frac{C}{4}\int_1^x \frac{\log u\ du}{u} + \mathcal{O}(\log x)$$

soit

$$\sum_{k\leq x} \frac{h(k)}{k} = \frac{C}{8}(\log x)^2 + \mathcal{O}(\log x).$$

D'où finalement:

$$|U_1(\theta)| \leq \frac{C}{16} x(\log x)^2 + \mathcal{O}(x\log x). \tag{30}$$

– C'est la somme $U_2(\theta)$ que l'on va chercher à minorer:

$$|U_2(\theta)| \geq \Re e\, U_2(\theta) = \sum_{k\leq \frac{x}{4y}} h(k) 2^{\lfloor \log_2 \frac{x}{k}\rfloor - 1}\Big(\cos(2^{\lfloor \log_2 \frac{x}{k}\rfloor} k\pi\theta) + 2\cos(2^{\lfloor \log_2 \frac{x}{k}\rfloor + 1} k\pi\theta)\Big)$$

Or pour tout α, on a l'inégalité $\cos(2\pi\alpha) \geq 1 - 2\pi\|\alpha\|$, donc:

$$|U_2(\theta)| \geq \sum_{k\leq \frac{x}{4y}} h(k) 2^{\lfloor \log_2 \frac{x}{k}\rfloor - 1}\Big(3 - 2\pi\|2^{\lfloor \log_2 \frac{x}{k}\rfloor - 1} k\theta\| - 4\pi\|2^{\lfloor \log_2 \frac{x}{k}\rfloor} k\theta\|\Big)$$

Or on a l'encadrement suivant:

$$\frac{x}{2} \leq 2^{\lfloor \log_2 \frac{x}{k}\rfloor} k \leq x$$

ce qui donne:

$$|U_2(\theta)| \geq \big(1 - 2\pi M(x,y,\theta)\big) U_2(0) \tag{31}$$

si on pose:

$$M(x,y,\theta) = \max_{\substack{\frac{x}{4} \leq n \leq x \\ 2^{\lfloor \log_2 y\rfloor} \nmid n}} \|n\theta\|$$

– Or d'après les majorations (28) et (29), on a:

$$U_2(\theta) = S(x,\theta) - U_1(\theta) + \mathcal{O}(x\log x\log y).$$

Par conséquent, en reportant dans (31), on obtient:

$$|S(x,\theta)| + |U_1(\theta)| \geq \big(1 - 2\pi M(x,y,\theta)\big)\big(S(x,0) - U_1(0)\big) + \mathcal{O}(x\log x\log y)$$

soit, d'après le lemme 6, et la majoration (30):

$$|S(x,\theta)| \geq \frac{C}{16}\Big(\big(\frac{2}{\log 2} - 1\big)\big(1 - 2\pi M(x,y,\theta)\big) - 1\Big) x(\log x)^2 + \mathcal{O}(x\log x\log y)$$

On obtient finalement, uniformément en x, y et θ:

$$|S(x,\theta)| \geq \Big((1-\log 2) - \pi(2-\log 2) M(x,y,\theta)\Big) S(x,0) + \mathcal{O}(x\log x\log y). \tag{32}$$

d) Étude de $M(x,y,\theta)$

On va montrer le résultat suivant:

Lemme 7. *Soit* $\phi : \mathbf{R}_+^* \to \mathbf{R}$ *telle que* $\lim_{x\to+\infty} \phi(x) = +\infty$. *Soit* $\varepsilon > 0$.
Alors il existe un irrationnel $\theta_{\phi,\varepsilon}$ *et une suite strictement croissante* (x_q) *d'entiers naturels telle que:*

$$\forall q \in \mathbf{N}, \mathbf{M}(\mathbf{x_q}, \phi(\mathbf{x_q}), \theta_{\phi,\varepsilon}) \leq \varepsilon.$$

PREUVE :

– On cherche $\theta_{\phi,\varepsilon}$ sous la forme

$$\theta_{\phi,\varepsilon} = \sum_{\nu=0}^{+\infty} 2^{-\alpha_\nu}$$

où (α_ν) est une suite strictement croissante d'entiers naturels.
Pour tout $n \in [\frac{x}{4}, x]$ tel que $n = 2^{\lfloor \log_2 y \rfloor} k$ $(k \in \mathbf{N})$, on a:

$$\|n\theta_{\phi,\varepsilon}\| = \|k \sum_{\nu=0}^{+\infty} 2^{\lfloor \log_2 y \rfloor - \alpha_\nu}\| = \|k \sum_{\substack{\nu \\ \alpha_\nu > \lfloor \log_2 y \rfloor}} 2^{\lfloor \log_2 y \rfloor - \alpha_\nu}\| \leq k 2^{\lfloor \log_2 y \rfloor + 1 - \min\{\alpha_\nu > \lfloor \log_2 y \rfloor\}}$$

soit:

$$M(x,y,\theta_{\phi,\varepsilon}) \leq \frac{2x}{2^{\min\{\alpha_\nu > \lfloor \log_2 y \rfloor\}}}. \tag{33}$$

– On définit alors la suite $(x_q)_{q\in\mathbf{N}}$ de la manière suivante. On pose:

$$\begin{cases} x_0 \in \mathbf{N}^* \textbf{ quelconque} \\ \alpha_0 = \max\{1 + \lfloor \log_2 \phi(x_0) \rfloor, 2 + \lfloor \log_2 x_0 - \log_2 \varepsilon \rfloor\} \end{cases}$$

puis, par récurrence:

$$\begin{cases} x_{q+1} > x_q \text{ tel que } \lfloor \log_2 \phi(x_{q+1}) \rfloor \geq \alpha_q \\ \alpha_{q+1} = \max\{1 + \lfloor \log_2 \phi(x_{q+1}) \rfloor, 2 + \lfloor \log_2 x_{q+1} - \log_2 \varepsilon \rfloor, \alpha_q + (q+1)\} \end{cases}$$

– Comme on a:

$$\forall q \in \mathbf{N}, \alpha_{\mathbf{q+1}} \geq \alpha_{\mathbf{q}} + (\mathbf{q} + \mathbf{1}),$$

la suite (α_q) est strictement croissante. De plus $\theta_{\phi,\varepsilon}$ est irrationnel (sinon (α_q) serait périodique et $\alpha_{q+1} - \alpha_q$ serait borné).

– Soit $q \in \mathbf{N}$. Par construction, on a:

$$\alpha_q = \min\{\alpha_\nu > \lfloor \log_2 \phi(x_q) \rfloor\}.$$

En effet $\alpha_q > \lfloor \log_2 \phi(x_q) \rfloor$ et $\forall \nu < q$, $\alpha_\nu \leq \alpha_{q-1} \leq \lfloor \log_2 \phi(x_q) \rfloor$.
Donc, d'après (33), on a bien défini une suite strictement croissante (x_q) telle que:

$$\forall q \in \mathbf{N}, \mathbf{M}(\mathbf{x_q}, \phi(\mathbf{x_q}), \theta_{\phi,\varepsilon}) \leq \frac{\mathbf{2x_q}}{\mathbf{2}^{\alpha_\mathbf{q}}} \leq \varepsilon.$$

e) Conclusion

On peut maintenant regrouper tous les résultats obtenus précédemment.
On choisit $\varepsilon > 0$ tel que:

$$(1 - \log 2) - \pi(2 - \log 2)\varepsilon = A > 0.$$

On prend la fonction $\phi = \log$. Elle vérifie bien les hypothèses du lemme 7, ce qui fournit un irrationnel $\theta_{\log,\varepsilon}$ et une suite (x_q). On a alors, d'après (32):

$$\forall q \in \mathbf{N}, |\mathbf{S}(\mathbf{x_q}, \theta_{\log,\varepsilon})| \geq \mathbf{A}\ \mathbf{S}(\mathbf{x_q}, \mathbf{0}) + \mathcal{O}(\mathbf{x_q} \log \mathbf{x_q} \log\log \mathbf{x_q}),$$

où (x_q) est une suite strictement croissante d'entiers naturels. Donc:

$$|S(x, \theta_{\log,\varepsilon})| = \Omega(S(x, 0)),$$

ce qui termine la démonstration du théorème 3.

Références

[1] S. Chowla, *Some problems of diophantine approximation (I)*, Math. Zeitschrift, **33** (1931), 544-563.

[2] H. Daboussi, *On some Exponential Sums*, in *Analytic Number Theory, Proceedings of a Conference in honour of Paul T. Bateman*, Birkhäuser, Boston (1990).

[3] H. Daboussi & H. Delange, *Quelques propriétés des fonctions multiplicatives de module au plus égal à 1*, C.R. Acad. Sci. Paris, Sér. A, **278** (1974), 657-660.

[4] H. Daboussi & H. Delange, *On multiplicative arithmetical functions whose modulus does not exceed one*, J. London. Math. Soc., (2) **26** (1982), 245-264.

[5] H. Davenport, *On some infinite series involving arithmetical functions (II)*, Quarterly J. Math, **8** (1937), 313-320.

[6] H. Delange, *Sur les fonctions arithmétiques multiplicatives*, Ann. Sci. Ec. Norm. Sup., 3^{e} série, **78** (1961), 273-304.

[7] Y. Dupain, R.R. Hall & G. Tenenbaum, *Sur l'équirépartition modulo 1 de certaines fonctions de diviseurs*, J. London. Math. Soc., (2) **26** (1982), 397-411.

[8] P. Erdös, *Some remarks on diophantine approximations*, J. Indian. Math. Soc., **12** (1948), 67-74.

[9] K.H. Indlekofer, *Properties of uniformly summable multiplicative functions*, Periodica Mathematica Hungarica, **17** (1986), 143-161.

[10] H.L. Montgomery & R.C. Vaughan, *On exponential sums with multiplicative coefficients*, Inventiones Math., **43** (1977), 69-82.

[11] G. Tenenbaum, *Introduction à la théorie analytique et probabiliste des nombres*, Publications de l'Institut Élie Cartan, Nancy (1990).

Chapitre 3

Formule de Voronoï tronquée pour τ_3

1. Introduction

a) Formules de sommation de Voronoï

– Pour ramener l'étude d'une somme

$$\sum_{a\leq n\leq b} f(n),$$

où f est une fonction arithmétique, à l'estimation du comportement asymptotique de certaines intégrales, on dispose de la célèbre formule de Poisson. Plus précisément, si f est une fonction à variations bornées sur $[a,b]$, on peut écrire:

$$\frac{1}{2}\sum_{a\leq n\leq b}{}'\{f(n^+)+f(n^-)\} = \int_a^b f(x)dx + 2\sum_{n=1}^{+\infty}\int_a^b f(x)\cos(2\pi nx)dx. \quad (34)$$

Les intégrales sont alors généralement évaluées grâce à la méthode de la phase stationnaire.

– En 1904, Voronoï a conjecturé que, si $a(n)$ est une fonction arithmétique, si f est une fonction continue sur $[a,b]$, avec un nombre fini d'extrema sur $[a,b]$, alors il existe des fonctions analytiques δ et α, dépendant seulement de a (et pas de f), telles que:

$$\sum_{a\leq n\leq b}{}'a(n)f(n) = \int_a^b f(x)\delta(x)dx + \sum_{n=1}^{+\infty}a(n)\int_a^b f(x)\alpha(nx)dx. \quad (35)$$

– D'après ce qui précède, la formule (35) est vérifiée pour $a(n)=1$, en prenant $\delta(x)=1$ et $\alpha(x)=2\cos(2\pi x)$.

– Voronoï ([27]) a prouvé sa conjecture pour $a(n)=\tau(n)$, avec $0<a<b<+\infty$, en prenant $\delta(x)=\log x+2\gamma$ et $\alpha(x)=4K_0(4\pi\sqrt{x})-2\pi Y_0(4\pi\sqrt{x})$. Wilton ([31]) a montré que le résultat était encore vrai pour f à variations bornées et $0\leq a<b\leq+\infty$ (cf aussi [6]).

– Le cas $a(n)=r(n)$ a été aussi résolu par Voronoï ([28]) pour $0<a<b<+\infty$, avec $\delta(x)=\pi$ et $\alpha(x)=\pi J_0(2\pi\sqrt{x})$, ce qui a été étendu au cas de f à variations bornées et $0\leq a<b\leq+\infty$ par Landau ([21]) et Dixon et Ferrar ([7]).

– B. Berndt ([2]) a donné un critère sur la série de Dirichlet associée à $a(n)$ pour obtenir une formule de sommation. Malheureusement, les fonctions τ_l ne rentrent pas dans ce cadre. Le premier objectif de cet article sera de généraliser la formule de sommation de Voronoï aux fonctions τ_l.

b) Sommes d'exponentielles

Un problème central dans la théorie de la fonction zêta de Riemann est l'estimation de valeurs moyennes sur la droite critique, du type:

$$\int_0^T \Big|\zeta\Big(\frac{1}{2}+it\Big)\Big|^{2k} dt.$$

Dans cette direction, Heath-Brown ([11]) a montré la majoration suivante:

$$\int_0^T \Big|\zeta\Big(\frac{1}{2}+it\Big)\Big|^{12} dt \ll T^2 \log^{17} T, \tag{36}$$

et Iwaniec, en utilisant des résultats de Kuznetzov sur des moyennes de sommes de Kloosterman, a obtenu ([13]):

$$\int_T^{T+T^{\frac{2}{3}}} \Big|\zeta\Big(\frac{1}{2}+it\Big)\Big|^{4} dt \ll_\varepsilon T^{\frac{2}{3}+\varepsilon}. \tag{37}$$

Partant d'une analogie entre le problème de diviseur de Dirichlet et la formule d'Atkinson, et par une technique mettant en jeu des formules de transformation de polynômes de Dirichlet, Jutila a redémontré ces résultats de manière plus classique et les a généralisés à d'autres séries de Dirichlet et à des sommes d'exponentielles faisant intervenir un paramètre (cf [14], [15], [16], [17], [18], [19]).

Il se ramène ainsi à des sommes du type:

$$S = \sum_M^{M'} \tau(m) g(m) e\big(f(m)\big),$$

où g est une fonction suffisamment lisse.

Pour étudier S, l'idée de départ est de choisir un système de Farey de fractions $\frac{h}{k}$ et de découper la somme suivant l'ordre de grandeur de $f'(x)$. A chaque rationnel $\frac{h}{k}$, on associe un intervalle $I\big(\frac{h}{k}\big)$ tel que $f'(x) \approx \frac{h}{k}$ pour $x \in I\big(\frac{h}{k}\big)$. Soit $S\big(\frac{h}{k}\big)$ la somme correspondante. On peut l'écrire:

$$S\Big(\frac{h}{k}\Big) = \sum_{I(\frac{h}{k})} \tau(m) g(m) e\Big(f(m) - \frac{mh}{k}\Big) e\Big(\frac{mh}{k}\Big),$$

de manière à appliquer la généralisation suivante de la formule de sommation de Voronoï ([14]):

Théorème A. (Jutila) *Si $0 < a < b < +\infty$, $f \in C^1([a,b])$ et $(h,k) = 1$, on a:*

$$\sum_{a\le n\le b}{}' \tau(n) e\Big(\frac{nh}{k}\Big) f(n) = \frac{1}{k}\int_a^b (\log x + 2\gamma - 2\log k) f(x) dx$$

$$+\frac{1}{k}\sum_{n=1}^{+\infty} \tau(n) \int_a^b \Big[4e\Big(\frac{n\overline{h}}{k}\Big) K_0\Big(\frac{4\pi\sqrt{nx}}{k}\Big) - 2\pi e\Big(-\frac{n\overline{h}}{k}\Big) Y_0\Big(\frac{4\pi\sqrt{nx}}{k}\Big)\Big] f(x) dx.$$

Ceci permet ensuite, en utilisant le développement asymptotique des fonctions de Bessel, d'estimer les intégrales par des méthodes de type phase stationnaire. Si le découpage de S est fait de manière adéquate, on peut en déduire une majoration non triviale de S.

Afin d'obtenir des résultats analogues à (36) et (37) pour d'autres séries de Dirichlet, il est naturel d'essayer de généraliser la formule de sommation aux fonctions τ_l pour $l \geq 3$. On s'attachera donc dans la suite à obtenir un analogue du théorème A pour ces fonctions.

c) Résultats

Dans la suite, on se limitera à $l = 3$.

Pour h et k deux entiers premiers entre eux, on s'intéressera à la somme d'exponentielles suivante:

$$D\Big(x,\frac{h}{k}\Big) := \sum_{n\leq x} \tau_3(n) e\Big(n\frac{h}{k}\Big).$$

On montrera d'abord la "formule de Voronoï tronquée" suivante:

Théorème 1. *Soit h et k deux entiers premiers entre eux. Pour $1 \leq N \ll x$ et $k \ll x^{\frac{2}{3}}$, on a:*

$$D\Big(x,\frac{h}{k}\Big) = \frac{x}{k}\big[c_2(k)\log^2 x + c_1(k)\log x + c_0(k)\big] + E\Big(0,\frac{h}{k}\Big) + \Delta\Big(x,\frac{h}{k}\Big),$$

où les $c_i(k)$ peuvent s'écrire explicitement et vérifient, pour $0 \leq i \leq 2$:

$$c_i(k) \ll_\varepsilon k^\varepsilon,$$

où $E\big(0,\frac{h}{k}\big)$ vérifie:

$$E\Big(0,\frac{h}{k}\Big) \ll k^{\frac{3}{2}}\tau_3(k)\tau(k)\log^3 k,$$

et où, pour $x \geq 1$, $k \leq x^{\frac{2}{3}}$ et $1 \leq N \ll x$, on a:

$$\Delta\Big(x,\frac{h}{k}\Big) = \frac{x^{\frac{1}{3}}\sqrt{3}}{12\pi}\sum_{r\leq N}\frac{1}{r^{\frac{2}{3}}}\cos\Big(\frac{6\pi(rx)^{\frac{1}{3}}}{k}\Big)\Big[\sum_{lmn=r}\big(K_{\overline{h},k}+K_{-\overline{h},k}\big)(l,m,n)\Big]$$

$$+\frac{ix^{\frac{1}{3}}\sqrt{3}}{12\pi}\sum_{r\leq N}\frac{1}{r^{\frac{2}{3}}}\sin\Big(\frac{6\pi(rx)^{\frac{1}{3}}}{k}\Big)\Big[\sum_{lmn=r}\big(K_{\overline{h},k}-K_{-\overline{h},k}\big)(l,m,n)\Big]$$

$$+\mathcal{O}_\varepsilon\big(kx^{\frac{2}{3}+\varepsilon}N^{-\frac{1}{3}}\big), \tag{38}$$

avec, pour $(b,k) = 1$:

$$|K_{b,k}(l,m,n)| \leq \tau_3(k)k^{\frac{1}{2}}(k,lmn)^{\frac{1}{2}}.$$

Dans le cas où $k = 1$, on retrouve un résultat dû à Atkinson ([1]):

Théorème B. (Atkinson) *Si on pose:*

$$\Delta(x) = \sum_{n\leq x}\tau_3(n) - \frac{x}{2}\log^2 x - (3\gamma-1)x\log x - (3\gamma^2+3\gamma_1-3\gamma+1)x + \frac{1}{8},$$

on a, pour $x \geq 1$ et $1 \leq N \ll x$:

$$\Delta(x) = \frac{x^{\frac{1}{3}}\sqrt{3}}{3\pi}\sum_{r\leq N}\frac{\tau_3(r)}{r^{\frac{2}{3}}}\cos\big(6\pi(rx)^{\frac{1}{3}}\big) + \mathcal{O}_\varepsilon\big(x^{\frac{2}{3}+\varepsilon}N^{-\frac{1}{3}}\big).$$

Par ailleurs en prenant $N = x^{\frac{1}{2}}k^{\frac{3}{4}}$ dans le théorème 1, on obtient:

Corollaire 1. *Pour $x \geq 1$ et $k \ll x^{\frac{2}{3}}$, on a, avec les notations du théorème 1:*

$$\Delta\Big(x,\frac{h}{k}\Big) \ll_\varepsilon x^{\frac{1}{2}+\varepsilon}k^{\frac{3}{4}}.$$

Dans le cas $k=1$, la majoration $\Delta(x) \ll_\varepsilon x^{\frac{1}{2}+\varepsilon}$ est due à Landau ([20]).
Remarque : En appliquant la méthode des paires d'exposants, on peut améliorer l'exposant $\frac{1}{2}$ dans le corollaire 1.

Enfin, en appliquant le même procédé que Jutila dans [14], on peut s'attendre à obtenir la formule de sommation suivante, pour $0 < a < b < +\infty$, $f \in C^1([a,b])$ et $(h,k)=1$:

$$\sum_{a\leq n\leq b}{}' \tau_3(n)e\Big(\frac{nh}{k}\Big)f(n) = \frac{1}{k}\int_a^b \big[c_2(k)\log^2 x + (c_1(k)+2c_2(k))\log x + (c_0(k)+c_1(k))\big]f(x)dx$$

$$+\frac{4}{k^2}\sum_{r=1}^{+\infty}\Big[\sum_{lmn=r}\big(K_{-\overline{h},k}+K_{\overline{h},k}\big)(l,m,n)\Big]\int_a^b\Big(\int_0^{+\infty}\frac{K_0(2\sqrt{u})-\frac{\pi}{2}Y_0(2\sqrt{u})}{u}\cos\frac{8\pi^3 rx}{k^3u}du\Big)f(x)dx$$

$$+\frac{4i}{k^2}\sum_{r=1}^{+\infty}\Big[\sum_{lmn=r}\big(K_{-\overline{h},k}-K_{\overline{h},k}\big)(l,m,n)\Big]\int_a^b\Big(\int_0^{+\infty}\frac{K_0(2\sqrt{u})+\frac{\pi}{2}Y_0(2\sqrt{u})}{u}\sin\frac{8\pi^3 rx}{k^3u}du\Big)f(x)dx.$$

Dans le cas où $k=1$, on trouverait ainsi que pour $a(n)=\tau_3(n)$, $0<a<b<+\infty$ et $f\in C^1([a,b])$, la formule de sommation (35) est vraie si l'on choisit:

$$\delta(x) = \frac{1}{2}\log^2 x + 3\gamma\log x + 3(\gamma^2+\gamma_1)$$

et

$$\alpha(x) = 8\int_0^{+\infty}\frac{K_0(2\sqrt{u})-\frac{\pi}{2}Y_0(2\sqrt{u})}{u}\cos\frac{8\pi^3 x}{u}du.$$

Nous verrons dans le chapitre suivant que la méthode utilisée ne permet en fait que d'obtenir une formule de Voronoï pour la somme pondérée

$$\sum_{n\leq x}{}'\tau_3(n)e\Big(\frac{nh}{k}\Big)(x-n)^\varepsilon,$$

où ε est une constante aussi petite que l'on veut, ce qui n'est pas gênant dans les applications de la formule.

d) Notations

– On aura recours aux fonctions arithmétiques suivantes, définies sur $\mathbf{N}^*$:

$\tau(n)$	nombre de diviseurs de n
$\tau_l(n)$	nombre de représentations de n comme produit de l entiers $\big(\tau_2=\tau\big)$
$r(n)$	nombre de représentations de n comme somme de deux entiers
$\mathbf{1}(n)$	fonction constante égale à 1
$\eta(n)$	valant 0 si $n>1$ et 1 si $n=1$
$\varphi(n)$	indicatrice d'Euler
$\Lambda(n)$	fonction de Von Mangoldt
$\mu(n)$	fonction de Möbius
$\chi_\delta(n)$	caractère principal modulo δ

La convolution de Dirichlet sera notée

$$(f*g)(n) := \sum_{k|n} f(k)g\Big(\frac{n}{k}\Big).$$

On utilisera également les notations suivantes, de type arithmétique:

(h,k)	*pgcd* de h et k
(h,m,n)	*pgcd* de h, m et n
p, p', p''	désignant des nombres premiers
$v_p(d)$	valuation p-adique de d
$\overline{b}^k$	inverse de b modulo k $\big(b\overline{b}^k \equiv 1 \bmod k\big)$
$S(m,n;k)$	somme de Kloosterman, valant $\sum\limits_{\substack{a,b=1\\ ab\equiv 1 \bmod k}}^{k} e\Big(\frac{am+bn}{k}\Big)$
$c_n(k)$	somme de Ramanujan, valant $\sum\limits_{\substack{h=1\\ (h,k)=1}}^{k} e\Big(\frac{nh}{k}\Big)$

– On se servira aussi des symboles classiques $\ll$, $\ll_\varepsilon$ et $\mathcal{O}$ pour les diverses majorations, l'indice ε indiquant que la constante impliquée dans la majoration dépend de ε.
La variable complexe sera désignée par $s = \sigma + it$, σ étant la partie réelle et t la partie imaginaire. Son argument, pris dans $]-\pi,\pi]$, sera noté $\arg(s)$. On notera $\mathrm{Res}(f(s),s=s_0)$ le résidu de la fonction holomorphe f au point $s = s_0$.
Par ailleurs, les fonctions suivantes apparaîtront:

$\lfloor x \rfloor$	partie entière de x
$e(x)$	signifiant $\exp(2i\pi x)$
$\Gamma(s)$	fonction gamma d'Euler
$\zeta(s)$	fonction zêta de Riemann
$\zeta(s,u)$	fonction zêta d'Hurwitz $\big(\zeta(s,1) = \zeta(s)\big)$
$L(s,\chi)$	fonction L de Dirichlet associée au caractère χ
$K_n(x)$	fonction de Bessel d'ordre n
$Y_n(x)$	fonction de Bessel d'ordre n
$J_n(x)$	fonction de Bessel d'ordre n

Enfin, le développement en série de Laurent de $\zeta(s)$ au voisinage de $s = 1$ sera noté:

$$\zeta(s) = \frac{1}{s-1} + \sum_{n=0}^{+\infty} \gamma_n (s-1)^n,$$

$\gamma_0 = \gamma$ étant la constante d'Euler.
Celui de la fonction $\zeta(s,u)$ sera noté:

$$\zeta(s,u) = \frac{1}{s-1} + \sum_{n=0}^{+\infty} \gamma_n(u)(s-1)^n.$$

Ainsi $\gamma_n(1) = \gamma_n$.

2. Etude de la série de Dirichlet

Pour étudier la somme d'exponentielles $D\big(x,\frac{h}{k}\big)$, on a besoin de connaître certaines propriétés de la série de Dirichlet associée, définie pour $\sigma > 1$ par:

$$E\Big(s,\frac{h}{k}\Big) := \sum_{n=1}^{+\infty} \tau_3(n) e\Big(\frac{nh}{k}\Big) n^{-s}.$$

a) La fonction zêta d'Hurwitz

Elle est définie pour $0 < u \leq 1$ et $\sigma > 1$ par:

$$\zeta(s,u) := \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(n+u)^s}.$$

On montre qu'elle admet un prolongement analytique en une fonction méromorphe sur $\mathbf{C}$, avec comme seul pôle un pôle simple au point $s = 1$. Son développement en série de Laurent au voisinage de $s = 1$ est de la forme:

$$\zeta(s,u) = \frac{1}{s-1} + \sum_{n=0}^{+\infty} \gamma_n(u)(s-1)^n, \tag{39}$$

où les coefficients peuvent s'expliciter de la manière suivante:

$$\gamma_n(u) = \frac{(-1)^n}{n!} \lim_{N\to+\infty} \Big(\sum_{m=0}^{N} \frac{\log^n(m+u)}{m+u} - \frac{\log^{n+1}(N+u)}{n+1} \Big). \tag{40}$$

Enfin, lorsque u est de la forme $\frac{l}{k}$, on a l'équation fonctionnelle suivante:

$$\zeta\Big(1-s,\frac{l}{k}\Big) = \frac{2\Gamma(s)}{(2\pi k)^s} \sum_{r=1}^{k} \cos\Big(\frac{\pi s}{2} - \frac{2\pi r l}{k}\Big) \zeta\Big(s,\frac{r}{k}\Big). \tag{41}$$

On peut trouver ces résultats dans [12], page 41. Ils se démontrent, soit comme pour la fonction zêta de Riemann, soit en utilisant la relation entre $\zeta\big(s,\frac{l}{k}\big)$ et les fonctions L de Dirichlet, issue de l'orthogonalité des caractères:

$$\zeta\Big(s,\frac{l}{k}\Big) = \frac{k^s}{\phi(k)} \sum_{\chi \bmod k} \overline{\chi}(l) L(s,\chi).$$

b) Prolongement analytique de E

La fonction $E\big(s,\frac{h}{k}\big)$ s'exprime simplement au moyen de la fonction zêta d'Hurwitz.

Lemme 1. *Pour $\sigma > 1$, on a:*

$$E\Big(s,\frac{h}{k}\Big) = k^{-3s} \sum_{\alpha,\beta,\gamma=1}^{k} e\Big(\frac{\alpha\beta\gamma h}{k}\Big) \zeta\Big(s,\frac{\alpha}{k}\Big) \zeta\Big(s,\frac{\beta}{k}\Big) \zeta\Big(s,\frac{\gamma}{k}\Big). \tag{42}$$

De plus cette égalité se prolonge à tout $s \neq 1$, et définit un prolongement analytique de $E\big(s,\frac{h}{k}\big)$ en une fonction méromorphe, avec comme seul pôle éventuel un pôle au plus triple au point $s = 1$.

PREUVE : On suppose $\sigma > 1$. Par définition de E, on peut écrire:

$$E\Big(s,\frac{h}{k}\Big) = \sum_{l,m,n=1}^{+\infty} e\Big(\frac{lmnh}{k}\Big)(lmn)^{-s}$$

$$= \sum_{\alpha,\beta,\gamma=1}^{k} e\Big(\frac{\alpha\beta\gamma h}{k}\Big) \Big(\sum_{\substack{l=1 \\ l\equiv\alpha \bmod k}}^{+\infty} \frac{1}{l^s} \Big) \Big(\sum_{\substack{m=1 \\ m\equiv\beta \bmod k}}^{+\infty} \frac{1}{m^s} \Big) \Big(\sum_{\substack{n=1 \\ n\equiv\gamma \bmod k}}^{+\infty} \frac{1}{n^s} \Big).$$

Or on a immédiatement:

$$\sum_{\substack{l=1\\ l\equiv\alpha \bmod k}}^{+\infty} \frac{1}{l^s} = \sum_{r=0}^{+\infty} \frac{1}{(\alpha+rk)^s} = k^{-s}\zeta\Big(s,\frac{\alpha}{k}\Big).$$

et de même

$$\sum_{\substack{m=1\\ m\equiv\beta \bmod k}}^{+\infty} \frac{1}{m^s} = k^{-s}\zeta\Big(s,\frac{\beta}{k}\Big)$$

et

$$\sum_{\substack{m=1\\ n\equiv\gamma \bmod k}}^{+\infty} \frac{1}{n^s} = k^{-s}\zeta\Big(s,\frac{\gamma}{k}\Big),$$

ce qui termine la démonstration.

c) Equation fonctionnelle pour E

On va utiliser l'équation fonctionnelle (41) pour déduire une autre expression de $E\big(s,\frac{h}{k}\big)$, valable quand $\sigma<0$.

On définit la fonction méromorphe suivante, analogue à E:

$$F\Big(s,\frac{h}{k}\Big) := k^{-3s} \sum_{\alpha,\beta,\gamma=1}^{k} K_{h,k}(\alpha,\beta,\gamma)\zeta\Big(s,\frac{\alpha}{k}\Big)\zeta\Big(s,\frac{\beta}{k}\Big)\zeta\Big(s,\frac{\gamma}{k}\Big),$$

où on pose:

$$K_{h,k}(\alpha,\beta,\gamma) := \sum_{\substack{u,v=1\\ uv\equiv\alpha h \bmod k}}^{k} e\Big(\frac{u\beta+v\gamma}{k}\Big).$$

On peut aussi écrire:

$$K_{h,k}(\alpha,\beta,\gamma) = \frac{1}{k}\sum_{t,u,v=1}^{k} e\Big(\frac{t\alpha+u\beta+v\gamma-tuv\overline{h}}{k}\Big),$$

où $\overline{h}$ désigne, quand h est premier avec k, l'inverse de h modulo k. Cela montre que $K_{h,k}$ est une fonction symétrique de α,β,γ.

Lemme 2. *E et F sont liés par l'équation fonctionnelle suivante:*

$$E\Big(1-s,\frac{h}{k}\Big) = 4(2\pi)^{-3s}\Gamma^3(s)k^{3s-2}\Big\{\Big[\Big(\cos\frac{s\pi}{2}\Big)^3 + i\Big(\sin\frac{s\pi}{2}\Big)^3\Big]F\Big(s,-\frac{\overline{h}}{k}\Big)$$
$$+\Big[\Big(\cos\frac{s\pi}{2}\Big)^3 - i\Big(\sin\frac{s\pi}{2}\Big)^3\Big]F\Big(s,\frac{\overline{h}}{k}\Big)\Big\}. \tag{43}$$

PREUVE :

– D'après le lemme 1, on a pour tout $s\neq 0$:

$$E\Big(1-s,\frac{h}{k}\Big) = k^{3s-3}\sum_{\alpha,\beta,\gamma=1}^{k} e\Big(\frac{\alpha\beta\gamma h}{k}\Big)\zeta\Big(1-s,\frac{\alpha}{k}\Big)\zeta\Big(1-s,\frac{\beta}{k}\Big)\zeta\Big(1-s,\frac{\gamma}{k}\Big).$$

En appliquant l'équation fonctionnelle (41), on obtient:

$$E\Big(1-s,\frac{h}{k}\Big) = \frac{8\Gamma^3(s)}{k^3(2\pi)^{3s}}\sum_{\alpha,\beta,\gamma=1}^{k} e\Big(\frac{\alpha\beta\gamma h}{k}\Big)\Big\{\sum_{u=1}^{k}\cos\Big(\frac{s\pi}{2}-\frac{2\pi u\alpha}{k}\Big)\zeta\Big(s,\frac{u}{k}\Big)\Big\}$$

$$\times\Big\{\sum_{v=1}^{k}\cos\Big(\frac{s\pi}{2}-\frac{2\pi v\beta}{k}\Big)\zeta\Big(s,\frac{v}{k}\Big)\Big\}\Big\{\sum_{w=1}^{k}\cos\Big(\frac{s\pi}{2}-\frac{2\pi w\gamma}{k}\Big)\zeta\Big(s,\frac{w}{k}\Big)\Big\}.$$

soit encore:

$$E\Big(1-s,\frac{h}{k}\Big)=\frac{8\Gamma^3(s)}{k^3(2\pi)^{3s}}\sum_{u,v,w=1}^{k}\zeta\Big(s,\frac{u}{k}\Big)\zeta\Big(s,\frac{v}{k}\Big)\zeta\Big(s,\frac{w}{k}\Big)S_{u,v,w}$$

avec:

$$S_{u,v,w}:=\sum_{\alpha,\beta,\gamma=1}^{k}e\Big(\frac{\alpha\beta\gamma h}{k}\Big)\cos\Big(\frac{s\pi}{2}-\frac{2\pi u\alpha}{k}\Big)\cos\Big(\frac{s\pi}{2}-\frac{2\pi v\beta}{k}\Big)\cos\Big(\frac{s\pi}{2}-\frac{2\pi w\gamma}{k}\Big).$$

– Cette dernière somme vaut:

$$S_{u,v,w}=\frac{1}{8}\sum_{\alpha,\beta,\gamma=1}^{k}e\Big(\frac{\alpha\beta\gamma h}{k}\Big)\Big\{e\Big(\frac{s}{4}-\frac{u\alpha}{k}\Big)+e\Big(-\frac{s}{4}+\frac{u\alpha}{k}\Big)\Big\}\Big\{e\Big(\frac{s}{4}-\frac{v\beta}{k}\Big)+e\Big(-\frac{s}{4}+\frac{v\beta}{k}\Big)\Big\}$$
$$\times\Big\{e\Big(\frac{s}{4}-\frac{w\gamma}{k}\Big)+e\Big(-\frac{s}{4}+\frac{w\gamma}{k}\Big)\Big\}.$$

En développant, on trouve:

– un terme en $e\big(\frac{3s}{4}\big)$, qui est multiplié par:

$$\frac{1}{8}\sum_{\alpha,\beta,\gamma=1}^{k}e\Big(\frac{\alpha\beta\gamma h}{k}\Big)e\Big(-\frac{u\alpha+v\beta+w\gamma}{k}\Big)=\frac{k}{8}K_{\overline{h},k}(u,v,w),$$

– un terme en $e\big(-\frac{3s}{4}\big)$, qui est multiplié par:

$$\frac{1}{8}\sum_{\alpha,\beta,\gamma=1}^{k}e\Big(\frac{\alpha\beta\gamma h}{k}\Big)e\Big(\frac{u\alpha+v\beta+w\gamma}{k}\Big)=\frac{k}{8}K_{-\overline{h},k}(u,v,w),$$

– trois termes en $e\big(\frac{s}{4}\big)$, affectés chacun du coefficient:

$$\frac{1}{8}\sum_{\alpha,\beta,\gamma=1}^{k}e\Big(\frac{\alpha\beta\gamma h}{k}\Big)e\Big(\frac{-u\alpha-v\beta+w\gamma}{k}\Big)=\frac{k}{8}K_{-\overline{h},k}(u,v,w),$$

– trois termes en $e\big(-\frac{s}{4}\big)$, affectés chacun du coefficient:

$$\frac{1}{8}\sum_{\alpha,\beta,\gamma=1}^{k}e\Big(\frac{\alpha\beta\gamma h}{k}\Big)e\Big(\frac{u\alpha+v\beta-w\gamma}{k}\Big)=\frac{k}{8}K_{\overline{h},k}(u,v,w).$$

– On obtient donc:

$$E\Big(1-s,\frac{h}{k}\Big)=\frac{\Gamma^3(s)}{k^2(2\pi)^{3s}}\sum_{u,v,w=1}^{k}\zeta\Big(s,\frac{u}{k}\Big)\zeta\Big(s,\frac{v}{k}\Big)\zeta\Big(s,\frac{w}{k}\Big)\Big\{\Big[e\Big(\frac{3s}{4}\Big)+3e\Big(-\frac{s}{4}\Big)\Big]K_{\overline{h},k}(u,v,w)$$
$$+\Big[e\Big(-\frac{3s}{4}\Big)+3e(\frac{s}{4}\Big)\Big]K_{-\overline{h},k}(u,v,w)\Big\}.$$

On termine la preuve en remarquant que l'on a les identités suivantes:

$$e\Big(\frac{3s}{4}\Big)+3e\Big(-\frac{s}{4}\Big)=4\Big[\Big(\cos\frac{s\pi}{2}\Big)^3-i\Big(\sin\frac{s\pi}{2}\Big)^3\Big]$$
$$e\Big(-\frac{3s}{4}\Big)+3e\Big(\frac{s}{4}\Big)=4\Big[\Big(\cos\frac{s\pi}{2}\Big)^3+i\Big(\sin\frac{s\pi}{2}\Big)^3\Big].$$

On va en déduire une nouvelle expression de $E\big(s,\frac{h}{k}\big)$ lorsque $\sigma<0$. On a d'abord le résultat suivant sur F:

Lemme 3. *Pour b et k premiers entre eux, et $\sigma>1$, on a:*

$$F\Big(s,\frac{b}{k}\Big)=\sum_{r=1}^{+\infty}\frac{1}{r^s}\sum_{lmn=r}K_{b,k}(l,m,n). \tag{44}$$

PREUVE : On a par définition:

$$F\Big(s,\frac{b}{k}\Big)=k^{-3s}\sum_{\alpha,\beta,\gamma=1}^{k}K_{b,k}(\alpha,\beta,\gamma)\zeta\Big(s,\frac{\alpha}{k}\Big)\zeta\Big(s,\frac{\beta}{k}\Big)\zeta\Big(s,\frac{\gamma}{k}\Big)$$

$$=\sum_{\alpha,\beta,\gamma=1}^{k}K_{b,k}(\alpha,\beta,\gamma)\Big(\sum_{\substack{l=1\\ l\equiv\alpha \bmod k}}^{+\infty}\frac{1}{l^s}\Big)\Big(\sum_{\substack{m=1\\ m\equiv\beta \bmod k}}^{+\infty}\frac{1}{m^s}\Big)\Big(\sum_{\substack{n=1\\ n\equiv\gamma \bmod k}}^{+\infty}\frac{1}{n^s}\Big)$$

$$=\sum_{l,m,n=1}^{+\infty}\frac{1}{(lmn)^s}K_{b,k}(l,m,n)$$

$$=\sum_{r=1}^{+\infty}\frac{1}{r^s}\sum_{lmn=r}K_{b,k}(l,m,n).$$

Lemme 4. *On suppose $\sigma<0$. Alors:*

$$E\Big(s,\frac{h}{k}\Big)=\frac{k}{2\pi^3}\Big(\frac{2\pi}{k}\Big)^{3s}\Gamma^3(1-s)\Big\{\Big(\sin\frac{s\pi}{2}\Big)^3\sum_{r=1}^{+\infty}\frac{1}{r^{1-s}}\Big[\sum_{lmn=r}\big(K_{-\overline{h},k}+K_{\overline{h},k}\big)(l,m,n)\Big]$$

$$+i\Big(\cos\frac{s\pi}{2}\Big)^3\sum_{r=1}^{+\infty}\frac{1}{r^{1-s}}\Big[\sum_{lmn=r}\big(K_{-\overline{h},k}-K_{\overline{h},k}\big)(l,m,n)\Big]\Big\}. \tag{45}$$

PREUVE : D'après (43), on peut écrire:

$$E\Big(s,\frac{h}{k}\Big)=\frac{1}{2\pi^3}(2\pi)^{3s}\Gamma^3(1-s)k^{1-3s}\Big\{\Big[\Big(\sin\frac{s\pi}{2}\Big)^3+i\Big(\cos\frac{s\pi}{2}\Big)^3\Big]F\Big(1-s,-\frac{\overline{h}}{k}\Big)$$

$$+\Big[\Big(\sin\frac{s\pi}{2}\Big)^3-i\Big(\cos\frac{s\pi}{2}\Big)^3\Big]F\Big(1-s,\frac{\overline{h}}{k}\Big).$$

Puis on remplace $F\big(1-s,\frac{\overline{h}}{k}\big)$ par l'expression correspondante dans (44).

d) Etude de $E(s,\frac{h}{k})$ au voisinage de $s=1$

On aura besoin des deux fonctions auxiliaires suivantes, définies par leur série de Dirichlet pour $\sigma>1$:

$$G\Big(s,\frac{h}{k}\Big):=\sum_{n=1}^{+\infty}\tau(n)e\Big(\frac{nh}{k}\Big)n^{-s},$$

$$H\Big(s,\frac{h}{k}\Big):=\sum_{n=1}^{+\infty}e\Big(\frac{nh}{k}\Big)n^{-s}.$$

– Les fonctions G et H sont liées à la fonction zêta d'Hurwitz de la manière suivante:

Lemme 5. *Pour $\sigma > 1$, on a:*

$$G\Big(s,\frac{h}{k}\Big) = k^{-2s}\sum_{\alpha,\beta=1}^{k} e\Big(\frac{\alpha\beta h}{k}\Big)\zeta\Big(s,\frac{\alpha}{k}\Big)\zeta\Big(s,\frac{\beta}{k}\Big), \tag{46}$$

$$H\Big(s,\frac{h}{k}\Big) = k^{-s}\sum_{\alpha=1}^{k} e\Big(\frac{\alpha h}{k}\Big)\zeta\Big(s,\frac{\alpha}{k}\Big). \tag{47}$$

De plus ces égalités se prolongent à tout $s \neq 1$, et définissent un prolongement analytique de $G\big(s,\frac{h}{k}\big)$ (resp. $H\big(s,\frac{h}{k}\big)$) en une fonction méromorphe, avec comme seul pôle éventuel un pôle au plus double (resp. simple) au point $s = 1$.

PREUVE : Elle est analogue à celle du lemme 1 (cf [14]).

– Par ailleurs les fonctions E, G et H sont liées entre elles comme suit:

Lemme 6. *Pour $s \neq 1$, on a:*

$$G\Big(s,\frac{h}{k}\Big) = k^{-s}\sum_{d|k}\sum_{\substack{l=1\\(l,d)=1}}^{d} H\Big(s,\frac{hl}{d}\Big)\zeta\Big(s,\frac{l}{d}\Big), \tag{48}$$

$$E\Big(s,\frac{h}{k}\Big) = k^{-s}\sum_{d|k}\sum_{\substack{l=1\\(l,d)=1}}^{d} G\Big(s,\frac{hl}{d}\Big)\zeta\Big(s,\frac{l}{d}\Big). \tag{49}$$

PREUVE : Montrons par exemple (49). Pour $\sigma > 1$, on a:

$$E\Big(s,\frac{h}{k}\Big) = \sum_{n=1}^{+\infty}\tau_3(n)e\Big(\frac{nh}{k}\Big)n^{-s} = \sum_{l,m=1}^{+\infty}\frac{\tau(l)}{(lm)^s}e\Big(lm\frac{h}{k}\Big).$$

$$= \sum_{d|k}\sum_{\substack{m=1\\(m,k)=\frac{k}{d}}}^{+\infty}\frac{1}{m^s}\sum_{l=1}^{+\infty}\frac{\tau(l)}{l^s}e\Big(\frac{lmh}{k}\Big).$$

Posons $m' := \frac{md}{k}$.

$$E\Big(s,\frac{h}{k}\Big) = \sum_{d|k}\sum_{\substack{m'=1\\(m',d)=1}}^{+\infty}\frac{1}{\big(\frac{m'k}{d}\big)^s}\sum_{l=1}^{+\infty}\frac{\tau(l)}{l^s}e\Big(l\frac{m'h}{d}\Big)$$

$$= \frac{1}{k^s}\sum_{d|k}\sum_{\substack{r=1\\(r,d)=1}}^{d}\Big(d^s\sum_{\substack{n=1\\n\equiv r \bmod d}}^{+\infty}\frac{1}{n^s}\Big)G\Big(s,\frac{rh}{d}\Big),$$

d'où le résultat.

On procéde de même pour établir (48).

– On a tout d'abord, en utilisant (39), le développement de Laurent de H:

$$H\Big(s,\frac{h}{k}\Big) = k^{-s}\sum_{\alpha=1}^{k} e\Big(\frac{\alpha h}{k}\Big)\zeta\Big(s,\frac{\alpha}{k}\Big)$$

$$= k^{-s}\Big\{\frac{1}{s-1}\sum_{\alpha=1}^{k} e\Big(\frac{\alpha h}{k}\Big)+\sum_{\alpha=1}^{k} e\Big(\frac{\alpha h}{k}\Big)\gamma_0\Big(\frac{\alpha}{k}\Big)+\Big[\sum_{\alpha=1}^{k} e\Big(\frac{\alpha h}{k}\Big)\gamma_1\Big(\frac{\alpha}{k}\Big)\Big](s-1)+\dots\Big\}$$

$$= k^{-s}\Big\{\frac{\eta(k)}{s-1}+\sum_{\alpha=1}^{k} e\Big(\frac{\alpha h}{k}\Big)\gamma_0\Big(\frac{\alpha}{k}\Big)+(s-1)\sum_{\alpha=1}^{k} e\Big(\frac{\alpha h}{k}\Big)\gamma_1\Big(\frac{\alpha}{k}\Big)+\dots\Big\}.$$

– On reporte cette expression dans (48):

$$G\Big(s,\frac{h}{k}\Big) = \frac{1}{k^s}\sum_{d|k}\frac{1}{d^s}\sum_{\substack{l=1\\(l,d)=1}}^{d}\Big\{\frac{\eta(d)}{s-1}+\sum_{\alpha=1}^{d} e\Big(\frac{\alpha hl}{d}\Big)\gamma_0\Big(\frac{\alpha}{d}\Big)+(s-1)\sum_{\alpha=1}^{d} e\Big(\frac{\alpha hl}{d}\Big)\gamma_1\Big(\frac{\alpha}{d}\Big)+\dots\Big\}$$

$$\times\Big\{\frac{1}{s-1}+\gamma_0\Big(\frac{l}{d}\Big)+(s-1)\gamma_1\Big(\frac{l}{d}\Big)+\dots\Big\}$$

$$= k^{-s}\Big\{\frac{1}{(s-1)^2}+\frac{\gamma}{s-1}+\gamma_1+\dots\Big\}+\frac{k^{-s}}{s-1}\sum_{d|k} d^{-s}\sum_{\substack{l=1\\(l,d)=1}}^{d}\sum_{\alpha=1}^{d} e\Big(\frac{\alpha hl}{d}\Big)\gamma_0\Big(\frac{l}{d}\Big)$$

$$+k^{-s}\sum_{d|k} d^{-s}\sum_{\substack{l=1\\(l,d)=1}}^{d}\sum_{\alpha=1}^{d} e\Big(\frac{lh\alpha}{d}\Big)\Big[\gamma_0\Big(\frac{\alpha}{d}\Big)\gamma_0\Big(\frac{l}{d}\Big)+\gamma_1\Big(\frac{\alpha}{d}\Big)\Big]+\dots$$

Or on a:

$$\sum_{\substack{l=1\\(l,d)=1}}^{d} e\Big(\frac{\alpha hl}{d}\Big) = c_d(h\alpha) = \frac{\mu\big(\frac{d}{(d,\alpha)}\big)}{\varphi\big(\frac{d}{(d,\alpha)}\big)}\varphi(d),$$

où $c_d(n)$ est la notation classique des sommes de Ramanujan (voir par exemple [10], page 238), si bien que:

$$G\Big(s,\frac{h}{k}\Big) = k^{-s}\Big\{\frac{1}{(s-1)^2}+\frac{\gamma}{s-1}+\gamma_1+\dots+\frac{1}{s-1}\sum_{d|k}\frac{\varphi(d)}{d^s}\sum_{\alpha=1}^{k}\gamma_0\Big(\frac{\alpha}{d}\Big)\frac{\mu\big(\frac{d}{(d,\alpha)}\big)}{\varphi\big(\frac{d}{(d,\alpha)}\big)}$$

$$+\sum_{d|k}\frac{\varphi(d)}{d^s}\sum_{\alpha=1}^{k}\gamma_1\Big(\frac{\alpha}{d}\Big)\frac{\mu\big(\frac{d}{(d,\alpha)}\big)}{\varphi\big(\frac{d}{(d,\alpha)}\big)}+\sum_{d|k}\frac{1}{d^s}\sum_{\substack{l=1\\(l,d)=1}}^{d}\sum_{\alpha=1}^{d} e\Big(\frac{\alpha lh}{d}\Big)\gamma_0\Big(\frac{\alpha}{d}\Big)\gamma_0\Big(\frac{l}{d}\Big)\Big\}. \tag{50}$$

– Evaluons maintenant les sommes faisant intervenir γ_0 ou γ_1.

Lemme 7.

$$\sum_{\substack{u=1\\(u,\delta)=1}}^{\delta}\gamma_0\Big(\frac{u}{\delta}\Big) = \varphi(\delta)\Big[\log\delta+\gamma+\sum_{p|\delta}\frac{\log p}{p-1}\Big], \tag{51}$$

$$\sum_{\substack{u=1\\(u,\delta)=1}}^{\delta}\gamma_1\Big(\frac{u}{\delta}\Big) = \varphi(\delta)\Big[\frac{1}{2}\log^2\delta+\Big(\gamma+\sum_{p|\delta}\frac{\log p}{p-1}\Big)\log\delta$$

$$+\Big(\gamma_1+\gamma\sum_{p|\delta}\frac{\log p}{p-1}+\sum_{\substack{p,p'|\delta\\p\neq p'}}\frac{(\log p)(\log p')}{(p-1)(p'-1)}-\frac{1}{2}\sum_{p|\delta}\frac{\log^2 p}{p-1}\Big)\Big]. \tag{52}$$

PREUVE : Les deux sommes à étudier sont respectivement les coefficients de 1 et de $(s-1)$ dans le développement en série de Laurent en $s=1$ de:

$$\sum_{\substack{u=1\\(u,\delta)=1}}^{\delta} \zeta\Big(s,\frac{u}{\delta}\Big) = \delta^s \sum_{\substack{u=1\\(u,\delta)=1}}^{\delta} \sum_{\substack{m=1\\m\equiv u \bmod \delta}}^{+\infty} \frac{1}{m^s} = \delta^s \sum_{\substack{m=1\\(m,\delta)=1}}^{+\infty} \frac{1}{m^s} = \delta^s L(s,\chi_\delta),$$

où χ_δ est le caractère principal modulo δ. Par conséquent:

$$\sum_{\substack{u=1\\(u,\delta)=1}}^{\delta} \zeta\Big(s,\frac{u}{\delta}\Big) = \delta^s\zeta(s)\prod_{p|\delta}\Big(1-\frac{1}{p^s}\Big) = \delta\big(1+(s-1)\log\delta+\frac{1}{2}(s-1)^2\log^2\delta+\dots\big)$$

$$\times\Big(\frac{1}{s-1}+\gamma+\gamma_1(s-1)+\dots\Big)\prod_{p|\delta}\Big(1-\frac{1}{p}+(s-1)\frac{\log p}{p}-(s-1)^2\frac{\log^2 p}{2p}+\dots\Big).$$

On a donc:

$$\sum_{\substack{u=1\\(u,\delta)=1}}^{\delta} \gamma_0\Big(\frac{u}{\delta}\Big) = \delta\log\delta\prod_{p|\delta}\Big(1-\frac{1}{p}\Big)+\gamma\delta\prod_{p|\delta}\Big(1-\frac{1}{p}\Big)+\sum_{p|\delta}\delta\frac{\log p}{p}\prod_{\substack{p'|\delta\\p'\neq p}}\Big(1-\frac{1}{p'}\Big)$$

$$= \varphi(\delta)\Big[\log\delta+\gamma+\sum_{p|\delta}\frac{\log p}{p-1}\Big].$$

Puis, de la même façon:

$$\sum_{\substack{u=1\\(u,\delta)=1}}^{\delta} \gamma_1\Big(\frac{u}{\delta}\Big) = \frac{\delta\log^2\delta}{2}\prod_{p|\delta}\Big(1-\frac{1}{p}\Big)+\delta\gamma_1\prod_{p|\delta}\Big(1-\frac{1}{p}\Big)+\delta\sum_{p|\delta}\Big(-\frac{\log^2 p}{2p}\Big)\prod_{\substack{p'|\delta\\p'\neq p}}\Big(1-\frac{1}{p'}\Big)$$

$$\delta\gamma\log\delta\prod_{p|\delta}\Big(1-\frac{1}{p}\Big)+\delta\sum_{p|\delta}(\gamma+\log\delta)\frac{\log p}{p}\prod_{\substack{p'|\delta\\p'\neq p}}\Big(1-\frac{1}{p'}\Big)+\delta\sum_{\substack{p,p'|\delta\\p\neq p'}}\frac{\log p\log p'}{pp'}\prod_{\substack{p''|\delta\\p''\neq p,p'}}\Big(1-\frac{1}{p''}\Big)$$

$$= \varphi(\delta)\Big[\frac{\log^2\delta}{2}+\Big(\gamma+\sum_{p|\delta}\frac{\log p}{p-1}\Big)\log\delta+\gamma_1+\gamma\sum_{p|\delta}\frac{\log p}{p-1}+\sum_{\substack{p,p'|\delta\\p\neq p'}}\frac{(\log p)(\log p')}{(p-1)(p'-1)}-\frac{1}{2}\sum_{p|\delta}\frac{\log^2 p}{p-1}\Big]$$

Dans les deux cas, on a utilisé le fait que:

$$\prod_{p|\delta}\Big(1-\frac{1}{p}\Big) = \frac{\varphi(\delta)}{\delta}.$$

Lemme 8.

$$\sum_{\alpha=1}^{d}\gamma_0\Big(\frac{\alpha}{d}\Big)\frac{\mu\big(\frac{d}{(d,\alpha)}\big)}{\varphi\big(\frac{d}{(d,\alpha)}\big)} = \gamma\eta(d)-\frac{d\Lambda(d)}{\varphi(d)}. \tag{53}$$

PREUVE : En posant $u := \frac{\alpha\delta}{d}$, on a:

$$\sum_{\alpha=1}^{d}\gamma_0\Big(\frac{\alpha}{d}\Big)\frac{\mu\big(\frac{d}{(d,\alpha)}\big)}{\varphi\big(\frac{d}{(d,\alpha)}\big)} = \sum_{\delta|d}\frac{\mu(\delta)}{\varphi(\delta)}\sum_{\substack{\alpha=1\\(\alpha,d)=\frac{d}{\delta}}}^{d}\gamma_0\Big(\frac{\alpha}{d}\Big) = \sum_{\delta|d}\frac{\mu(\delta)}{\varphi(\delta)}\sum_{\substack{u=1\\(u,\delta)=1}}^{\delta}\gamma_0\Big(\frac{u}{\delta}\Big),$$

ce qui, avec la formule (51), donne:

$$\sum_{\alpha=1}^{d}\gamma_0\Big(\frac{\alpha}{d}\Big)\frac{\mu\big(\frac{d}{(d,\alpha)}\big)}{\varphi\big(\frac{d}{(d,\alpha)}\big)} = \sum_{\delta|d}\mu(\delta)\Big[\log\delta+\gamma+\sum_{p|\delta}\frac{\log p}{p-1}\Big]$$

$$= (\mu \log * \mathbf{1})(d) + \gamma(\mu * \mathbf{1})(d) + \sum_{\delta|d} \mu(\delta) \sum_{p|\delta} \frac{\log p}{p-1}$$

$$= \gamma\eta(d) - \Lambda(d) + \sum_{p|d} \frac{\log p}{p-1} \sum_{p|\delta|d} \mu(\delta).$$

Or

$$\sum_{p|\delta|d} \mu(\delta) = \sum_{\lambda|\frac{d}{p}} \mu(p\lambda) = \mu(p) \sum_{\lambda|\frac{d}{p^{v_p(d)}}} \mu(\lambda) = -\eta\Big(\frac{d}{p^{v_p(d)}}\Big)$$

Donc

$$\sum_{\alpha=1}^{d} \gamma_0\Big(\frac{\alpha}{d}\Big) \frac{\mu\big(\frac{d}{(d,\alpha)}\big)}{\varphi\big(\frac{d}{(d,\alpha)}\big)} = \gamma\eta(d) - \Lambda(d) - \sum_{p|d} \eta\Big(\frac{d}{p^{v_p(d)}}\Big) \frac{\log p}{p-1}$$

$$= \gamma\eta(d) - \sum_{p|d} \eta\Big(\frac{d}{p^{v_p(d)}}\Big) \frac{p \log p}{p-1} = \gamma\eta(d) - \frac{d\Lambda(d)}{\varphi(d)}.$$

Lemme 9.

$$\sum_{\alpha=1}^{d} \gamma_1\Big(\frac{\alpha}{d}\Big) \frac{\mu\big(\frac{d}{(d,\alpha)}\big)}{\varphi\big(\frac{d}{(d,\alpha)}\big)} = \gamma_1\eta(d) - \frac{\gamma d\Lambda(d)}{\varphi(d)} + \frac{d}{2\varphi(d)}(\mu \log^2 * \mathbf{1})(d). \tag{54}$$

PREUVE : En posant $u := \frac{\alpha\delta}{d}$, on a:

$$\sum_{\alpha=1}^{d} \gamma_1\Big(\frac{\alpha}{d}\Big) \frac{\mu\big(\frac{d}{(d,\alpha)}\big)}{\varphi\big(\frac{d}{(d,\alpha)}\big)} = \sum_{\delta|d} \frac{\mu(\delta)}{\varphi(\delta)} \sum_{\substack{\alpha=1 \\ (\alpha,d)=\frac{d}{\delta}}}^{d} \gamma_1\Big(\frac{\alpha}{d}\Big) = \sum_{\delta|d} \frac{\mu(\delta)}{\varphi(\delta)} \sum_{\substack{u=1 \\ (u,\delta)=1}}^{\delta} \gamma_1\Big(\frac{u}{\delta}\Big),$$

ce qui, avec la formule (52), donne:

$$\sum_{\alpha=1}^{d} \gamma_1\Big(\frac{\alpha}{d}\Big) \frac{\mu\big(\frac{d}{(d,\alpha)}\big)}{\varphi\big(\frac{d}{(d,\alpha)}\big)} = \sum_{\delta|d} \mu(\delta) \Big[\frac{1}{2}\log^2\delta + \Big(\gamma + \sum_{p|\delta} \frac{\log p}{p-1}\Big)\log\delta$$

$$+ \Big(\gamma_1 + \gamma \sum_{p|\delta} \frac{\log p}{p-1} + \sum_{\substack{p,p'|\delta \\ p\neq p'}} \frac{(\log p)(\log p')}{(p-1)(p'-1)} - \frac{1}{2}\sum_{p|\delta} \frac{\log^2 p}{p-1}\Big)\Big]$$

$$= \frac{1}{2}(\mu \log^2 * \mathbf{1})(d) + \gamma_1\eta(d) - \frac{\gamma d\Lambda(d)}{\varphi(d)} + \sum_{\delta|d} \mu(\delta)\log\delta \sum_{p|\delta} \frac{\log p}{p-1}$$

$$+ \sum_{\delta|d} \mu(\delta) \sum_{\substack{p,p'|\delta \\ p\neq p'}} \frac{(\log p)(\log p')}{(p-1)(p'-1)} - \frac{1}{2}\sum_{\delta|d} \mu(\delta) \sum_{p|\delta} \frac{\log^2 p}{p-1}. \tag{55}$$

– La première somme vaut:

$$\sum_{\delta|d} \mu(\delta)\log\delta \sum_{p|\delta} \frac{\log p}{p-1} = \sum_{p|d} \frac{\log p}{p-1} \sum_{p|\delta|d} \mu(\delta)\log\delta = \sum_{p|d} \frac{\log p}{p-1} \sum_{\lambda|\frac{d}{p}} \mu(p\lambda)\log(p\lambda)$$

$$= \sum_{p|d} \frac{\log^2 p}{p-1} \sum_{\lambda|\frac{d}{p}} \mu(p\lambda) + \sum_{p|d} \frac{\log p}{p-1} \sum_{\lambda|\frac{d}{p}} \mu(p\lambda)\log\lambda$$

$$= -\sum_{p|d} \frac{\log^2 p}{p-1} \eta\Big(\frac{d}{p^{v_p(d)}}\Big) + \sum_{p|d} \frac{\log p}{p-1} \Lambda\Big(\frac{d}{p^{v_p(d)}}\Big).$$

– La troisième somme vaut:

$$\sum_{\delta|d}\mu(\delta)\sum_{p|\delta}\frac{\log^2 p}{p-1}=\sum_{p|d}\frac{\log^2 p}{p-1}\sum_{p|\delta|d}\mu(\delta)=-\sum_{p|d}\frac{\log^2 p}{p-1}\eta\Big(\frac{d}{p^{v_p(d)}}\Big).$$

– La deuxième somme vaut:

$$\sum_{\delta|d}\mu(\delta)\sum_{\substack{p,p'|\delta\\ p\neq p'}}\frac{(\log p)(\log p')}{(p-1)(p'-1)}=\sum_{\substack{p,p'|d\\ p\neq p'}}\frac{(\log p)(\log p')}{(p-1)(p'-1)}\sum_{pp'|\delta|d}\mu(\delta)$$

$$=\sum_{\substack{p,p'|d\\ p\neq p'}}\frac{(\log p)(\log p')}{(p-1)(p'-1)}\eta\Big(\frac{d}{p^{v_p(d)}p'^{v_{p'}(d)}}\Big).$$

On peut donc écrire, en reportant ces trois expressions dans (55):

$$\sum_{\alpha=1}^{d}\gamma_1\Big(\frac{\alpha}{d}\Big)\frac{\mu\big(\frac{d}{(d,\alpha)}\big)}{\varphi\big(\frac{d}{(d,\alpha)}\big)}=\frac{1}{2}(\mu\log^2*\mathbf{1})(d)+\gamma_1\eta(d)-\frac{\gamma d\Lambda(d)}{\varphi(d)}-\frac{1}{2}\sum_{p|d}\frac{\log^2 p}{p-1}\eta\Big(\frac{d}{p^{v_p(d)}}\Big)$$

$$+\sum_{p|d}\frac{\log p}{p-1}\Lambda\Big(\frac{d}{p^{v_p(d)}}\Big)+\sum_{\substack{p,p'|d\\ p\neq p'}}\frac{(\log p)(\log p')}{(p-1)(p'-1)}\eta\Big(\frac{d}{p^{v_p(d)}p'^{v_{p'}(d)}}\Big).\qquad(56)$$

– <u>1er cas</u>: d possède plus de deux facteurs premiers.
Les trois derniers termes de (56) sont alors nuls. De plus, on peut écrire $d=lmn$ avec l, m et n premiers entre eux deux à deux, et différents de 1, si bien que:

$$(\mu\log^2*\mathbf{1})(d)=\sum_{a|l}\sum_{b|m}\sum_{c|n}\mu(abc)\log^2(abc)$$

$$=(\mu\log^2*\mathbf{1})(l)\eta(m)\eta(n)+(\mu\log^2*\mathbf{1})(m)\eta(n)\eta(l)+(\mu\log^2*\mathbf{1})(n)\eta(l)\eta(m)$$
$$-2\Lambda(l)\Lambda(m)\eta(n)-2\Lambda(m)\Lambda(n)\eta(l)-2\Lambda(n)\Lambda(l)\eta(m)=0.$$

L'égalité (54) est donc vérifiée.

– <u>2ème cas</u>: $d=p^\lambda q^\nu$, où p, q sont premiers, et $\lambda\geq 1$, $\nu\geq 1$.

$$\sum_{p|d}\frac{\log^2 p}{p-1}\eta\Big(\frac{d}{p^{v_p(d)}}\Big)=0.$$

$$\frac{1}{2}(\mu\log^2*\mathbf{1})(d)=\frac{1}{2}\big(-\log^2 p-\log^2 q+\log^2 pq\big)=(\log p)(\log q).$$

$$\sum_{p|d}\frac{\log p}{p-1}\Lambda\Big(\frac{d}{p^{v_p(d)}}\Big)=\frac{\log p}{p-1}\Lambda\big(q^\nu\big)+\frac{\log q}{q-1}\Lambda\big(p^\lambda\big)=(\log p)(\log q)\Big(\frac{1}{p-1}+\frac{1}{q-1}\Big).$$

$$\sum_{\substack{p,p'|d\\ p\neq p'}}\frac{(\log p)(\log p')}{(p-1)(p'-1)}\eta\Big(\frac{d}{p^{v_p(d)}p'^{v_{p'}(d)}}\Big)=\frac{(\log p)(\log q)}{(p-1)(q-1)}.$$

En reportant ces résultats dans (56), on obtient:

$$\sum_{\alpha=1}^{d}\gamma_1\Big(\frac{\alpha}{d}\Big)\frac{\mu\big(\frac{d}{(d,\alpha)}\big)}{\varphi\big(\frac{d}{(d,\alpha)}\big)}=\frac{pq}{(p-1)(q-1)}(\log p)(\log q)=\frac{d}{2\varphi(d)}(\mu\log^2*\mathbf{1})(d),$$

d'où l'égalité (54).

– $\underline{3^{\text{ème}}\text{ cas}}$: $d = p^\lambda$, où p est premier et $\lambda \geq 1$.
Les deux derniers termes de (56) sont nuls. Par ailleurs:

$$-\frac{1}{2}\sum_{p|d}\frac{\log^2 p}{p-1}\eta\Big(\frac{d}{p^{v_p(d)}}\Big) = -\frac{1}{2}\frac{\log^2 p}{p-1}.$$

$$\frac{1}{2}(\mu\log^2 * \mathbf{1})(d) = -\frac{1}{2}\log^2 p.$$

Par conséquent, en reportant dans (56):

$$\sum_{\alpha=1}^{d}\gamma_1\Big(\frac{\alpha}{d}\Big)\frac{\mu\big(\frac{d}{(d,\alpha)}\big)}{\varphi\big(\frac{d}{(d,\alpha)}\big)} = -\frac{\gamma d\Lambda(d)}{\varphi(d)} + \frac{d}{2\varphi(d)}(\mu\log^2 * \mathbf{1})(d).$$

L'égalité (54) est encore vérifiée.
– $\underline{4^{\text{ème}}\text{ cas}}$: $d = 1$
L'égalité (54) est immédiate, car $\gamma_1(1) = \gamma_1$.

– On peut maintenant reporter les résultats des lemmes 8 et 9 dans (50).

$$G\Big(s,\frac{h}{k}\Big) = k^{-s}\Big\{\frac{1}{(s-1)^2} + \frac{\gamma}{s-1} + \gamma_1 + \frac{1}{s-1}\sum_{d|k} d^{1-s}[\gamma\eta(d) - \Lambda(d)]$$

$$+\sum_{d|k}\frac{d}{d^s}\big[\gamma_1\eta(d) - \gamma\Lambda(d) + \frac{1}{2}(\mu\log^2 * \mathbf{1})(d)\big] + \sum_{d|k}\frac{1}{d^s}\sum_{\substack{l=1\\(l,d)=1}}^{d}\sum_{\alpha=1}^{d} e\Big(\frac{\alpha l h}{d}\Big)\gamma_0\Big(\frac{\alpha}{d}\Big)\gamma_0\Big(\frac{l}{d}\Big) + \dots\Big\}$$

$$= k^{-s}\Big\{\frac{1}{(s-1)^2} + \frac{\gamma}{s-1} + \gamma_1 + \frac{1}{s-1}\big[\gamma(\eta * \mathbf{1})(k) - (\Lambda * \mathbf{1})(k)\big]$$

$$+\big[-\gamma(\eta\log * \mathbf{1})(k) + (\Lambda\log * \mathbf{1})(k)\big] + \big[\gamma_1(\eta * \mathbf{1})(k) - \gamma(\Lambda * \mathbf{1})(k) + \frac{1}{2}(\mu\log^2 * \tau)(k)\big]$$

$$+\sum_{d|k}\frac{1}{d}\sum_{\substack{l=1\\(l,d)=1}}^{d}\sum_{\alpha=1}^{d} e\Big(\frac{\alpha l h}{d}\Big)\gamma_0\Big(\frac{\alpha}{d}\Big)\gamma_0\Big(\frac{l}{d}\Big) + \dots\Big\}.$$

Or on a les identités de convolution suivantes: $\begin{cases}\eta * \mathbf{1} = \mathbf{1}\\ \Lambda * \mathbf{1} = \log\\ \eta\log * \mathbf{1} = 0\end{cases}$ d'où:

$$G\Big(s,\frac{h}{k}\Big) = k^{-s}\Big\{\frac{1}{(s-1)^2} + \frac{2\gamma - \log k}{s-1} + \big[2\gamma_1 - \gamma\log k + (\Lambda\log * \mathbf{1})(k) + \frac{1}{2}(\mu\log^2 * \tau)(k)\big]$$

$$+\sum_{d|k}\frac{1}{d}\sum_{\substack{l=1\\(l,d)=1}}^{d}\sum_{\alpha=1}^{d} e\Big(\frac{\alpha l h}{d}\Big)\gamma_0\Big(\frac{\alpha}{d}\Big)\gamma_0\Big(\frac{l}{d}\Big) + \dots\Big\}. \qquad (57)$$

– On peut maintenant reporter ce résultat dans l'identité (49):

$$E\Big(s,\frac{h}{k}\Big) = k^{-s}\sum_{d|k}\frac{1}{d}\Big\{1 - (s-1)\log d + (s-1)^2\frac{\log^2 d}{2} + \dots\Big\}$$

$$\times\sum_{\substack{l=1\\(l,d)=1}}^{d}\Big\{\frac{1}{(s-1)^2} + \frac{2\gamma - \log d}{s-1} + \big[2\gamma_1 - \gamma\log d + (\Lambda\log * \mathbf{1})(d) + \frac{1}{2}(\mu\log^2 * \tau)(d)\big]$$

$$+\sum_{\delta|d}\frac{1}{\delta}\sum_{\substack{u=1\\(u,\delta)=1}}^{\delta}\sum_{v=1}^{\delta}\gamma_0\Big(\frac{u}{\delta}\Big)\gamma_0\Big(\frac{d}{\delta}\Big)e\Big(\frac{uvlh}{\delta}\Big)+\dots\Big\}\Big\{\frac{1}{s-1}+\gamma_0\Big(\frac{l}{d}\Big)+(s-1)\gamma_1\Big(\frac{l}{d}\Big)+\dots\Big\}.$$

Notons:

$$k^sE\Big(s,\frac{h}{k}\Big)=\frac{c_{-3}}{(s-1)^3}+\frac{c_{-2}}{(s-1)^2}+\frac{c_{-1}}{s-1}+\dots$$

ce qui donnera

$$E\Big(s,\frac{h}{k}\Big)=\frac{1}{k}\Big\{1-(s-1)\log k+(s-1)^2\frac{\log^2 k}{2}+\dots\Big\}\Big\{\frac{c_{-3}}{(s-1)^3}+\frac{c_{-2}}{(s-1)^2}+\frac{c_{-1}}{s-1}+\dots\Big\},$$

c'est à dire:

$$E\Big(s,\frac{h}{k}\Big)=\frac{c_{-3}}{k(s-1)^3}+\frac{c_{-2}-c_{-3}\log k}{k(s-1)^2}+\frac{c_{-1}-c_{-2}\log k+\frac{1}{2}c_{-3}\log^2 k}{k(s-1)}+\dots \tag{58}$$

– On a tout d'abord

$$c_{-3}=\sum_{d|k}\frac{1}{d}\sum_{\substack{l=1\\(l,d)=1}}^{d}1,$$

c'est-à-dire:

$$c_{-3}=\sum_{d|k}\frac{\varphi(d)}{d}.$$

– Ensuite, on peut écrire:

$$c_{-2}=-\sum_{d|k}\frac{\varphi(d)}{d}\log d+2\gamma\sum_{d|k}\frac{\varphi(d)}{d}-\sum_{d|k}\frac{\varphi(d)}{d}\log d+\sum_{d|k}\frac{1}{d}\sum_{\substack{l=1\\(l,d)=1}}^{d}\gamma_0\Big(\frac{l}{d}\Big),$$

ce qui, en utilisant (51), donne:

$$c_{-2}=-\sum_{d|k}\frac{\varphi(d)}{d}\log d+3\gamma\sum_{d|k}\frac{\varphi(d)}{d}+\sum_{d|k}\frac{\varphi(d)}{d}\sum_{p|d}\frac{\log p}{p-1}.$$

– Enfin, on a:

$$c_{-1}=\frac{1}{2}\sum_{d|k}\frac{\varphi(d)}{d}\log^2 d+2\gamma_1\sum_{d|k}\frac{\varphi(d)}{d}-\gamma\sum_{d|k}\frac{\varphi(d)}{d}\log d+\sum_{d|k}\frac{\varphi(d)}{d}(\Lambda\log*\mathbf{1})(d)$$

$$+\frac{1}{2}\sum_{d|k}\frac{\varphi(d)}{d}(\mu\log^2*\tau)(d)+\sum_{d|k}\frac{1}{d}\sum_{\delta|d}\frac{1}{\delta}\sum_{\substack{u=1\\(u,\delta)=1}}^{\delta}\sum_{v=1}^{\delta}\gamma_0\Big(\frac{u}{\delta}\Big)\gamma_0\Big(\frac{v}{\delta}\Big)\sum_{\substack{l=1\\(l,d)=1}}^{d}e\Big(\frac{uvlh}{\delta}\Big)$$

$$+\sum_{d|k}\frac{1}{d}\sum_{\substack{l=1\\(l,d)=1}}^{d}\gamma_1\Big(\frac{l}{d}\Big)-2\gamma\sum_{d|k}\frac{\varphi(d)}{d}\log d+\sum_{d|k}\frac{\varphi(d)}{d}\log^2 d$$

$$-2\sum_{d|k}\frac{\log d}{d}\sum_{\substack{l=1\\(l,d)=1}}^{d}\gamma_0\Big(\frac{l}{d}\Big)+2\gamma\sum_{d|k}\frac{1}{d}\sum_{\substack{l=1\\(l,d)=1}}^{d}\gamma_0\Big(\frac{l}{d}\Big).$$

– D'après le calcul classique des sommes de Ramanujan, on a, comme h et u sont premiers avec δ:

$$\sum_{\substack{l=1\\(l,d)=1}}^{d}e\Big(\frac{uvdh}{\delta}\Big)=c_d\Big(\frac{uvdh}{\delta}\Big)=\frac{\mu\big(\frac{d}{(d,\frac{uvhd}{\delta})}\big)}{\varphi\big(\frac{d}{(d,\frac{uvhd}{\delta})}\big)}\varphi(d)=\frac{\mu\big(\frac{\delta}{(\delta,uv)}\big)}{\varphi\big(\frac{\delta}{(\delta,uv)}\big)}\varphi(d)=\frac{\mu\big(\frac{\delta}{(\delta,v)}\big)}{\varphi\big(\frac{\delta}{(\delta,v)}\big)}\varphi(d)$$

– Posons:

$$T := \sum_{d|k} \frac{1}{d} \sum_{\delta|d} \frac{1}{\delta} \sum_{\substack{u=1 \\ (u,\delta)=1}}^{\delta} \sum_{v=1}^{\delta} \gamma_0\Big(\frac{u}{\delta}\Big)\gamma_0\Big(\frac{v}{\delta}\Big) \sum_{\substack{l=1 \\ (l,d)=1}}^{d} e\Big(\frac{uvlh}{\delta}\Big).$$

D'après le calcul précédent, on peut écrire:

$$T = \sum_{d|k} \frac{\varphi(d)}{d} \sum_{\delta|d} \frac{1}{\delta} \sum_{v=1}^{\delta} \gamma_0\Big(\frac{v}{\delta}\Big) \frac{\mu\big(\frac{\delta}{(\delta,v)}\big)}{\varphi\big(\frac{\delta}{(\delta,v)}\big)} \sum_{\substack{u=1 \\ (u,\delta)=1}}^{\delta} \gamma_0\Big(\frac{u}{\delta}\Big).$$

D'après la formule (51), cela donne:

$$T = \sum_{d|k} \frac{\varphi(d)}{d} \sum_{\delta|d} \frac{\varphi(\delta)}{\delta} \Big[\log\delta + \gamma + \sum_{p|\delta} \frac{\log p}{p-1}\Big] \sum_{v=1}^{\delta} \gamma_0\Big(\frac{v}{\delta}\Big) \frac{\mu\big(\frac{\delta}{(\delta,v)}\big)}{\varphi\big(\frac{\delta}{(\delta,v)}\big)},$$

puis, d'après (53):

$$T = \sum_{d|k} \frac{\varphi(d)}{d} \sum_{\delta|d} \Big[\log\delta + \gamma + \sum_{p|\delta} \frac{\log p}{p-1}\Big][\gamma\eta(\delta) - \Lambda(\delta)]$$

$$= \gamma^2 \sum_{d|k} \frac{\varphi(d)}{d} - \sum_{d|k} \frac{\varphi(d)}{d} \sum_{\delta|d} \Lambda(\delta)\Big[\log\delta + \gamma + \sum_{p|\delta} \frac{\log p}{p-1}\Big]$$

soit:

$$T = \gamma^2 \sum_{d|k} \frac{\varphi(d)}{d} - \sum_{d|k} \frac{\varphi(d)(\Lambda\log * \mathbf{1})(d)}{d} - \gamma \sum_{d|k} \frac{\varphi(d)\log d}{d} - \sum_{d|k} \frac{\varphi(d)}{d} \sum_{\delta|d} \Lambda(\delta) \sum_{p|\delta} \frac{\log p}{p-1}. \tag{59}$$

– Posons:

$$U := \sum_{d|k} \frac{1}{d} \sum_{\substack{l=1 \\ (l,d)=1}}^{d} \gamma_1\Big(\frac{l}{d}\Big).$$

D'après la formule (52), cela donne:

$$U = \frac{1}{2} \sum_{d|k} \frac{\varphi(d)\log^2 d}{d} + \gamma \sum_{d|k} \frac{\varphi(d)}{d} \log d + \sum_{d|k} \frac{\varphi(d)}{d} \log d \sum_{p|d} \frac{\log p}{p-1} + \gamma_1 \sum_{d|k} \frac{\varphi(d)}{d}$$

$$+ \gamma \sum_{d|k} \frac{\varphi(d)}{d} \sum_{p|d} \frac{\log p}{p-1} + \sum_{d|k} \frac{\varphi(d)}{d} \sum_{\substack{p,p'|d \\ p\neq p'}} \frac{(\log p)(\log p')}{(p-1)(p'-1)} - \frac{1}{2} \sum_{d|k} \frac{\varphi(d)}{d} \sum_{p|d} \frac{\log^2 p}{p-1}. \tag{60}$$

– Soit:

$$V := -2 \sum_{d|k} \frac{\log d}{d} \sum_{\substack{l=1 \\ (l,d)=1}}^{d} \gamma_0\Big(\frac{l}{d}\Big).$$

D'après la formule (51), cela donne:

$$V = -2 \sum_{d|k} \frac{\varphi(d)}{d} \log^2 d - 2\gamma \sum_{d|k} \frac{\varphi(d)\log d}{d} - 2 \sum_{d|k} \frac{\varphi(d)\log d}{d} \sum_{p|d} \frac{\log p}{p-1}. \tag{61}$$

– Soit enfin:

$$W := 2\gamma \sum_{d|k} \frac{1}{d} \sum_{\substack{l=1 \\ (l,d)=1}}^{d} \gamma_0\Big(\frac{l}{d}\Big).$$

D'après (51), on obtient:

$$W = 2\gamma \sum_{d|k} \frac{\varphi(d)}{d} \log d + 2\gamma^2 \sum_{d|k} \frac{\varphi(d)}{d} + 2\gamma \sum_{d|k} \frac{\varphi(d)}{d} \sum_{p|d} \frac{\log p}{p-1}. \tag{62}$$

– En reportant les résultats partiels (59), (60), (61) et (62) dans c_{-1}, on trouve:

$$c_{-1} = \Big[3(\gamma_1 + \gamma^2) \sum_{d|k} \frac{\varphi(d)}{d}\Big] + \Big[3\gamma \sum_{d|k} \frac{\varphi(d)}{d} \sum_{p|d} \frac{\log p}{p-1} - 3\gamma \sum_{d|k} \frac{\varphi(d)}{d} \log d\Big]$$

$$+\Big[\frac{1}{2} \sum_{d|k} \frac{\varphi(d)(\mu \log^2 * \tau)(d)}{d} - \sum_{d|k} \frac{\varphi(d)}{d} \sum_{\delta|d} \Lambda(\delta) \sum_{p|\delta} \frac{\log p}{p-1} - \sum_{d|k} \frac{\varphi(d)}{d} \log d \sum_{p|d} \frac{\log p}{p-1}$$

$$+ \sum_{d|k} \frac{\varphi(d)}{d} \sum_{\substack{p,p'|d \\ p \neq p'}} \frac{(\log p)(\log p')}{(p-1)(p'-1)} - \frac{1}{2} \sum_{d|k} \frac{\varphi(d)}{d} \sum_{p|d} \frac{\log^2 p}{p-1}\Big].$$

On peut résumer le résultat obtenu de la façon suivante:

Lemme 10. *La fonction $E\big(s, \frac{h}{k}\big)$ possède en $s = 1$ le développement en série de Laurent suivant:*

$$E\Big(s, \frac{h}{k}\Big) = \frac{c_{-3}}{k(s-1)^3} + \frac{c_{-2} - c_{-3} \log k}{k(s-1)^2} + \frac{c_{-1} - c_{-2} \log k + \frac{1}{2} c_{-3} \log^2 k}{k(s-1)} + \dots$$

où:

$$c_{-1} = \Big[3(\gamma_1 + \gamma^2) \sum_{d|k} \frac{\varphi(d)}{d}\Big] + \Big[3\gamma \sum_{d|k} \frac{\varphi(d)}{d} \sum_{p|d} \frac{\log p}{p-1} - 3\gamma \sum_{d|k} \frac{\varphi(d)}{d} \log d\Big]$$

$$+\Big[\frac{1}{2} \sum_{d|k} \frac{\varphi(d)(\mu \log^2 * \tau)(d)}{d} - \sum_{d|k} \frac{\varphi(d)}{d} \sum_{\delta|d} \Lambda(\delta) \sum_{p|\delta} \frac{\log p}{p-1} - \sum_{d|k} \frac{\varphi(d)}{d} \log d \sum_{p|d} \frac{\log p}{p-1}$$

$$+ \sum_{d|k} \frac{\varphi(d)}{d} \sum_{\substack{p,p'|d \\ p \neq p'}} \frac{(\log p)(\log p')}{(p-1)(p'-1)} - \frac{1}{2} \sum_{d|k} \frac{\varphi(d)}{d} \sum_{p|d} \frac{\log^2 p}{p-1}\Big],$$

$$c_{-2} = -\sum_{d|k} \frac{\varphi(d)}{d} \log d + 3\gamma \sum_{d|k} \frac{\varphi(d)}{d} + \sum_{d|k} \frac{\varphi(d)}{d} \sum_{p|d} \frac{\log p}{p-1},$$

$$c_{-3} = \sum_{d|k} \frac{\varphi(d)}{d}.$$

Remarque 1 : On peut aussi écrire $\mu \log^2 * \tau = \log^2 - 2\Lambda \log * \mathbf{1} = 2\Lambda * \log - \log^2$.
Remarque 2 : Une fois que l'on sait que les coeeficients du développement en série de Laurent ne dépendent pas de h, on peut retrouver le résultat plus simplement. En effet, il suffit alors d'étudier:

$$\tilde{E}(s) = \frac{1}{\phi(k)} \sum_{\substack{h=1 \\ (h,k)=1}}^{k} E\Big(s, \frac{h}{k}\Big) = \frac{1}{\phi(k)} \sum_{n=1}^{+\infty} \tau_3(n) c_k(n) n^{-s},$$

où:

$$c_k(n) = \sum_{\substack{h=1\\(h,k)=1}}^{k} e\Big(\frac{nh}{k}\Big) = \frac{\mu\big(\frac{k}{(n,k)}\big)}{\phi\big(\frac{k}{(n,k)}\big)}\phi(k),$$

d'où, après calcul:

$$\tilde{E}(s) = \zeta^3(s)\Big[\prod_{p|k}\Big(1-\frac{1}{p^s}\Big)^3\Big]\sum_{d|k}\frac{\mu(d)}{\phi(d)}\Big(d,\frac{k}{d}\Big)^{-s}\tau_3\Big(\Big(d,\frac{k}{d}\Big)\Big)$$

$$\times\prod_{\substack{p^\beta \| \frac{k}{d}\\ p\nmid d}}\Big(1-\frac{1}{p^s}\Big)^{-3}\Big\{1-\Big(1-\frac{1}{p^s}\Big)^2\Big(1-\frac{(\beta+1)(\beta+2)}{2p^{\beta s}}\Big)+\Big(1-\frac{1}{p^s}\Big)\frac{\beta}{p^{(\beta+1)s}}-\frac{1}{p^s}\Big(1-\frac{1}{p^{\beta s}}\Big)\Big(2-\frac{1}{p^s}\Big)\Big\}.$$

Une formule analogue pour la fonction τ avait été montrée par Crum ([4]).

Reste à savoir si l'on peut montrer à *priori* que les coefficients cherchés sont indépendants de h.

3. Utilisation des sommes de Kloosterman

a) La majoration de Weil

Les sommes de Kloosterman sont définies par:

$$S(m,n;k) := \sum_{\substack{a,b=1\\ ab=1 \bmod k}}^{k} e\Big(\frac{am+bn}{k}\Big).$$

Théorème C. (Weil-Estermann)

$$|S(m,n;k)| \le \tau(k)k^{\frac{1}{2}}(k,m,n)^{\frac{1}{2}}. \tag{63}$$

Ce résultat a été montré par Weil dans le cas où k est premier (cf [30]) et étendu à k quelconque par Estermann (cf [9]).

b) Majoration de $K_{b,k}(\alpha,\beta,\gamma)$

Lemme 11. *On suppose b et k premiers entre eux.*

$$|K_{b,k}(\alpha,\beta,\gamma)| \le \tau_3(k)k^{\frac{1}{2}}(k,\alpha\beta\gamma)^{\frac{1}{2}}. \tag{64}$$

PREUVE :

– En utilisant la multiplicativité de $K_{b,k}(\alpha,\beta,\gamma)$ en k, on va se ramener au cas où k est une puissance de nombre premier.
Supposons que $k = k_1k_2$, où k_1 et k_2 sont premiers entre eux. On cherche b_1 et b_2, respectivement premiers à k_1 et k_2, tels que:

$$K_{b,k}(\alpha,\beta,\gamma) = K_{b_1,k_1}(\alpha,\beta,\gamma)K_{b_2,k_2}(\alpha,\beta,\gamma).$$

On a pour tout b_1 premier avec k_1 et pour tout b_2 premier avec k_2:

$$k_1K_{b_1,k_1}(\alpha,\beta,\gamma) = \sum_{t,u,v=1}^{k_1} e\Big(\frac{t\alpha+u\beta+v\gamma-tuv\overline{b_1}^{k_1}}{k_1}\Big)$$

et

$$k_2K_{b_2,k_2}(\alpha,\beta,\gamma) = \sum_{w,x,y=1}^{k_2} e\Big(\frac{w\alpha+x\beta+y\gamma-wxy\overline{b_2}^{k_2}}{k_2}\Big).$$

Donc $k_1k_2K_{b_1,k_1}(\alpha,\beta,\gamma)K_{b_2,k_2}(\alpha,\beta,\gamma)$ est égal à la somme:

$$\sum_{t,w}\sum_{u,x}\sum_{v,y} e\Big(\frac{(tk_2+wk_1)\alpha+(uk_2+xk_1)\beta+(vk_2+yk_1)\gamma-k_2tuv\overline{b_1}^{k_1}-k_1wxy\overline{b_2}^{k_2}}{k_1k_2}\Big).$$

Par ailleurs

$$(tk_2+wk_1)(uk_2+xk_1)(vk_2+yk_1)\equiv tuvk_2^3+wxyk_1^3 \bmod k_1k_2.$$

Donc on aura

$$(tk_2+wk_1)(uk_2+xk_1)(vk_2+yk_1)\bar{b}^{k_1k_2}\equiv k_2tuv\overline{b_1}^{k_1}-k_1wxy\overline{b_2}^{k_2} \bmod k_1k_2$$

si on choisit b_1 et b_2 tels que:

$$\begin{cases} k_2\overline{b_1}^{k_1}\equiv k_2^3\bar{b}^{k_1k_2} \bmod k_1k_2\\ k_1\overline{b_2}^{k_2}\equiv k_1^3\bar{b}^{k_1k_2} \bmod k_1k_2.\end{cases}$$

On prend:

$$\begin{cases} b_1=\overline{k_2^2\bar{b}^{k_1k_2}}^{k_1}\\ b_2=\overline{k_1^2\bar{b}^{k_1k_2}}^{k_2}.\end{cases}$$

Comme on a l'isomorphisme suivant (théorème chinois):

$$\begin{cases} \mathbf{Z/k_1Z}\times\mathbf{Z/k_2Z}\simeq\mathbf{Z/k_1k_2Z}\\ (t,w)\longmapsto tk_2+wk_1,\end{cases}$$

on en déduit que:

$$k_1k_2K_{b_1,k_1}(\alpha,\beta,\gamma)K_{b_2,k_2}(\alpha,\beta,\gamma)=\sum_{A,B,C=1}^{k_1k_2} e\Big(\frac{A\alpha+B\beta+C\gamma-ABC\bar{b}^{k_1k_2}}{k_1k_2}\Big),$$

soit:

$$K_{b_1,k_1}(\alpha,\beta,\gamma)K_{b_2,k_2}(\alpha,\beta,\gamma)=K_{b,k}(\alpha,\beta,\gamma).$$

– Le terme $\tau_3(k)k^{\frac{1}{2}}(k,\alpha\beta\gamma)^{\frac{1}{2}}$ étant multiplicatif en k, et indépendant de b, il suffit d'après ce qui précède de montrer l'inégalité (64) lorsque k est une puissance de nombre premier.

– Prenons donc $k=p^\nu$, où k est premier et ν est un entier naturel et posons:

$$\begin{cases} (\alpha,k)=p^{\nu_\alpha}; & \alpha'=\frac{\alpha}{p^{\nu_\alpha}}\\ (\beta,k)=p^{\nu_\beta}; & \beta'=\frac{\beta}{p^{\nu_\beta}}\\ (\gamma,k)=p^{\nu^\gamma}; & \gamma'=\frac{\gamma}{p^{\nu_\gamma}}.\end{cases}$$

La fonction $K_{b,k}$ étant symétrique en α,β,γ, on peut supposer $\nu_\alpha\le\nu_\beta\le\nu_\gamma\le\nu$, car $\tau_3(k)k^{\frac{1}{2}}(k,\alpha\beta\gamma)^{\frac{1}{2}}$ est également symétrique.

$$K_{b,k}(\alpha,\beta,\gamma)=\sum_{\substack{u,v=1\\ uv\equiv\alpha\bar{b} \bmod p^\nu}}^{p^\nu} e\Big(\frac{u\beta+v\gamma}{p^\nu}\Big)=\sum_{\substack{u,v=1\\ p^{\nu_\alpha}\mid uv\\ \frac{uv}{p^{\nu_\alpha}}\equiv\alpha'\bar{b} \bmod p^{\nu-\nu_\alpha}}}^{p^\nu} e\Big(\frac{u\beta+v\gamma}{p^\nu}\Big).$$

Donc, si suppose que k ne divise pas simultanément α, β et γ, on a:

$$K_{b,k}(\alpha,\beta,\gamma)=\sum_{\lambda=0}^{\nu_\alpha}\sum_{\substack{u,v=1\\ p^\lambda\mid u\\ p^{\nu_\alpha-\lambda}\mid v\\ \frac{uv}{p^{\nu_\alpha}}\equiv\alpha'\bar{b} \bmod p^{\nu-\nu_\alpha}}}^{p^\nu} e\Big(\frac{u\beta'p^{\nu_\beta}+v\gamma'p^{\nu_\gamma}}{p^\nu}\Big).$$

– En effet, dans ce cas, on a $\nu_\alpha < \nu$. Donc si on suppose

$$\begin{cases} p^\lambda | u \\ p^{\nu_\alpha - \lambda} | v \\ \frac{uv}{p^{\nu_\alpha}} \equiv \alpha' b \bmod p^{\nu - \nu_\alpha} \end{cases} \qquad \text{et} \qquad \begin{cases} p^{\lambda'} | u \\ p^{\nu_\alpha - \lambda'} | v \\ \frac{uv}{p^{\nu_\alpha}} \equiv \alpha' b \bmod p^{\nu - \nu_\alpha} \end{cases}$$

et par exemple $\lambda' > \lambda$, alors:

$$p^{\lambda'} p^{\nu_\alpha - \lambda} | uv,$$

donc

$$p | p^{\lambda' - \lambda} | \frac{uv}{p^{\nu_\alpha}}.$$

Or

$$p | p^{\nu - \nu_\alpha} | \frac{uv}{p^{\nu_\alpha}} - \alpha' b,$$

ce qui donne $p | \alpha' b$, qui est impossible car α' et b sont premiers avec k.

– Donc, quand k ne divise pas à la fois α, β et γ, on a, en posant $k = k' p^{\nu_\alpha}$:

$$K_{b,k}(\alpha,\beta,\gamma) = \sum_{\lambda=0}^{\nu_\alpha} \underbrace{\sum_{u'=1}^{p^{\nu-\lambda}} \sum_{v'=1}^{p^{\nu-\nu_\alpha+\lambda}}}_{u'v' = \alpha' b \bmod k'} e\Big(\frac{u'\beta' p^{\nu_\beta - \nu_\alpha + \lambda} + v'\gamma' p^{\nu_\gamma - \lambda}}{k'}\Big).$$

Or u' parcourt $\{1, \dots, p^{\nu-\lambda}\}$, c'est-à-dire $p^{\nu_\alpha - \lambda}$ fois $\{1, \dots, p^{\nu - \nu_\alpha} = k'\}$ modulo k'. De même v' parcourt $\{1, \dots, p^{\nu - \nu_\alpha + \lambda}\}$, c'est-à-dire p^λ fois $\{1, \dots, p^{\nu-\nu_\alpha} = k'\}$ modulo k'. Donc:

$$K_{b,k}(\alpha,\beta,\gamma) = \sum_{\lambda=0}^{\nu_\alpha} p^{\nu_\alpha - \lambda} p^\lambda \sum_{\substack{u', v' = 1 \\ u'v' \equiv \alpha' b \bmod k'}}^{k'} e\Big(\frac{u' p^{\lambda + \nu_\beta - \nu_\alpha} \beta' + v' p^{\nu_\gamma - \lambda} \gamma'}{k'}\Big),$$

soit:

$$K_{b,k}(\alpha,\beta,\gamma) = p^{\nu_\alpha} \sum_{\lambda=0}^{\nu_\alpha} S\big(\beta' p^{\lambda + \nu_\beta - \nu_\alpha}, \gamma' p^{\nu_\gamma - \lambda} \alpha' b; k'\big).$$

– On applique maintenant la majoration (63):

$$|K_{b,k}(\alpha,\beta,\gamma)| \leq p^{\nu_\alpha} \sum_{\lambda=0}^{\nu_\alpha} \tau\Big(\frac{k}{p^{\nu_\alpha}}\Big) \Big(\frac{k}{p^{\nu_\alpha}}\Big)^{\frac{1}{2}} \Big(\frac{k}{p^{\nu_\alpha}}, \frac{\beta}{p^{\nu_\alpha - \lambda}}, \frac{\gamma}{p^\lambda}\Big)^{\frac{1}{2}} \leq (1 + \nu_\alpha) \tau\Big(\frac{k}{p^{\nu_\alpha}}\Big) k^{\frac{1}{2}} (k, \beta\gamma)^{\frac{1}{2}}.$$

Or on a:

$$(1 + \nu_\alpha) \tau\Big(\frac{k}{p^{\nu_\alpha}}\Big) = (1 + \nu_\alpha)(\nu - \nu_\alpha + 1) = -\nu_\alpha^2 + \nu_\alpha \nu + (\nu + 1),$$

et la fonction $x \mapsto -x^2 + x\nu + (\nu + 1)$ a pour maximum $\frac{(\nu+2)^2}{4}$, donc:

$$(1 + \nu_\alpha) \tau\Big(\frac{k}{p^{\nu_\alpha}}\Big) \leq \frac{(\nu + 2)^2}{4} \leq \frac{(\nu + 2)(\nu + 1)}{2} = \tau_3\big(p^\nu\big) = \tau_3(k),$$

ce qui donne

$$|K_{b,k}(\alpha,\beta,\gamma)| \leq \tau_3(k) k^{\frac{1}{2}} (k, \alpha\beta\gamma)^{\frac{1}{2}}$$

et donne le résultat du lemme lorsque α, β et γ ne sont pas tous divisibles par k.

– Dans le cas où k divise à la fois α, β et γ, on a:

$$K_{b,k}(\alpha,\beta,\gamma) = \sum_{\substack{u,v=1\\ k|uv}}^{k} 1 \leq \sum_{dd'=k} \sum_{\substack{u=1\\ d|u}}^{k} \sum_{\substack{v=1\\ d'|v}}^{k} 1.$$

Donc:

$$K_{b,k}(\alpha,\beta,\gamma) \leq \sum_{dd'=k} \frac{k}{d}\frac{k}{d'} = k\tau(k) \leq \tau_3(k) k^{\frac{1}{2}} (k,\alpha\beta\gamma)^{\frac{1}{2}},$$

ce qui achève la preuve du lemme.

c) Majoration de $E(0,\frac{h}{k})$

Lemme 12. *Soit h et k deux entiers premiers entre eux. Alors:*

$$E\Big(0,\frac{h}{k}\Big) \ll k^{\frac{3}{2}} \tau_3(k)\tau(k)\log^3 k. \tag{65}$$

PREUVE :

– D'après l'équation fonctionnelle (43), on a, pour tout $s \neq 0$::

$$E\Big(s,\frac{h}{k}\Big) = \frac{1}{2\pi^3}(2\pi)^{3s}\Gamma^3(1-s)k^{1-3s}\Big\{\Big[\Big(\sin\frac{s\pi}{2}\Big)^3 + i\Big(\cos\frac{s\pi}{2}\Big)^3\Big]F\Big(1-s,-\frac{\overline{h}}{k}\Big)$$

$$+\Big[\Big(\sin\frac{s\pi}{2}\Big)^3 + i\Big(\cos\frac{s\pi}{2}\Big)^3\Big]F\Big(1-s,\frac{\overline{h}}{k}\Big)\Big\}.$$

De plus, on a, d'après (39):

$$\zeta\Big(1-s,\frac{\alpha}{k}\Big) = -\frac{1}{s} + \gamma_0\Big(\frac{\alpha}{k}\Big) - \gamma_1\Big(\frac{\alpha}{k}\Big) + \gamma_2\Big(\frac{\alpha}{k}\Big)s^2 + \dots$$

Donc, pour tout b premier avec k:

$$F\Big(1-s,\frac{b}{k}\Big) = k^{3s-3}\Big\{\frac{A_{b,k}}{s^3} + \frac{B_{b,k}}{s^2} + \frac{C_{b,k}}{s} + D_{b,k} + E_{b,k}\dots\Big\},$$

avec:

$$A_{b,k} := \sum_{\alpha,\beta,\gamma=1}^{k} K_{b,k}(\alpha,\beta,\gamma),$$

$$B_{b,k} := 3\sum_{\alpha,\beta,\gamma=1}^{k} K_{b,k}(\alpha,\beta,\gamma)\gamma_0\Big(\frac{\alpha}{k}\Big),$$

$$C_{b,k} := 3\sum_{\alpha,\beta,\gamma=1}^{k} K_{b,k}(\alpha,\beta,\gamma)\Big[\gamma_0\Big(\frac{\alpha}{k}\Big)\gamma_0\Big(\frac{\beta}{k}\Big) + \gamma_1\Big(\frac{\alpha}{k}\Big)\Big],$$

$$D_{b,k} := 3\sum_{\alpha,\beta,\gamma=1}^{k} K_{b,k}(\alpha,\beta,\gamma)\Big[2\gamma_0\Big(\frac{\alpha}{k}\Big)\gamma_1\Big(\frac{\beta}{k}\Big) + \gamma_2\Big(\frac{\alpha}{k}\Big)\Big].$$

$$E_{b,k} := \sum_{\alpha,\beta,\gamma=1}^{k} K_{b,k}(\alpha,\beta,\gamma)\gamma_0\Big(\frac{\alpha}{k}\Big)\gamma_0\Big(\frac{\beta}{k}\Big)\gamma_0\Big(\frac{\gamma}{k}\Big).$$

– On a tout d'abord:

$$\sum_{\gamma=1}^{k} K_{b,k}(\alpha,\beta,\gamma) = \frac{1}{k}\sum_{\gamma=1}^{k}\sum_{t,u,v=1}^{k} e\Big(\frac{t\alpha+u\beta+v\gamma-tuv\bar{b}}{k}\Big).$$

Or on a:

$$\frac{1}{k}\sum_{\gamma=1}^{k} e\Big(\frac{v\gamma}{k}\Big) = \begin{cases} 0 & \text{si } v \neq k \\ 1 & \text{si } v = k, \end{cases}$$

ce qui donne:

$$\sum_{\gamma=1}^{k} K_{b,k}(\alpha,\beta,\gamma) = \sum_{t,u=1}^{k} e\Big(\frac{t\alpha+u\beta}{k}\Big) = \begin{cases} k^2 & \text{si } (\alpha,\beta) = (k,k) \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Par conséquent:

$$A_{b,k} = k^2,$$
$$B_{b,k} = 3\gamma k^2,$$
$$C_{b,k} = 3(\gamma^2+\gamma_1)k^2,$$

et

$$D_{b,k} = 3(2\gamma\gamma_1+\gamma_2)k^2.$$

– Ensuite, d'après (40), on a pour tout $u \in]0,1]$:

$$\gamma_0(u) = \lim_{N\to+\infty}\Big(\sum_{m=0}^{N}\frac{1}{m+u} - \log(N+u)\Big).$$

Or, en utilisant la formule des accroissements finis, on a pour $m = 0,1,\ldots,N-1$:

$$\log(m+u+1) - \log(m+u) \leq \frac{1}{m+u},$$

ce qui donne:

$$\sum_{m=0}^{N}\frac{1}{m+u} - \log(N+u) \geq \frac{1}{N+u} - \log u \geq 0,$$

si bien que:

$$\gamma_0(u) \geq 0. \tag{66}$$

– En utilisant (66) et la majoration (64), on obtient:

$$|E_{b,k}| \leq \tau_3(k)k^{\frac{1}{2}}\sum_{\alpha,\beta,\gamma}^{k}(k,\alpha\beta\gamma)^{\frac{1}{2}}\gamma_0\Big(\frac{\alpha}{k}\Big)\gamma_0\Big(\frac{\beta}{k}\Big)\gamma_0\Big(\frac{\gamma}{k}\Big)$$

$$\leq \tau_3(k)k^{\frac{1}{2}}\sum_{r|k} r^{\frac{1}{2}}\sum_{lmn=r}\Big(\sum_{\substack{\alpha=1\\ l|\alpha}}^{k}\gamma_0\Big(\frac{\alpha}{k}\Big)\Big)\Big(\sum_{\substack{\beta=1\\ m|\beta}}^{k}\gamma_0\Big(\frac{\beta}{k}\Big)\Big)\Big(\sum_{\substack{\gamma=1\\ n|\gamma}}^{k}\gamma_0\Big(\frac{\gamma}{k}\Big)\Big)$$

$$\leq \tau_3(k)k^{\frac{1}{2}}\sum_{r|k} r^{\frac{1}{2}}\sum_{lmn=r}\Big(\sum_{\alpha'=1}^{\frac{k}{l}}\gamma_0\Big(\frac{\alpha'}{\frac{k}{l}}\Big)\Big)\Big(\sum_{\beta'=1}^{\frac{k}{m}}\gamma_0\Big(\frac{\beta'}{\frac{k}{m}}\Big)\Big)\Big(\sum_{\gamma'=1}^{\frac{k}{n}}\gamma_0\Big(\frac{\gamma'}{\frac{k}{n}}\Big)\Big).$$

Or, comme dans la démonstration de (51), on a:

$$\sum_{u=1}^{\delta}\zeta\Big(s,\frac{u}{\delta}\Big) = \sum_{u=1}^{\delta}\sum_{m=1}^{+\infty}\frac{1}{\big(m+\frac{u}{\delta}\big)^s} = \delta^s\sum_{u=1}^{\delta}\sum_{\substack{m=1\\ m\equiv u \bmod \delta}}^{+\infty}\frac{1}{m^s} = \delta^s\zeta(s)$$

$= \delta\big(1+(s-1)\log\delta+\dots\big)\Big(\dfrac{1}{s-1}+\gamma+\dots\Big) = \delta\Big(\dfrac{1}{s-1}+(\gamma+\log\delta)+\dots\Big),$

ce qui donne en prenant le terme constant du développement en série de Laurent:

$$\sum_{u=1}^{\delta}\gamma_0\Big(\frac{u}{\delta}\Big) = \delta(\gamma+\log\delta).$$

On obtient ainsi:

$$|E_{b,k}| \le \tau_3(k)k^{\frac{7}{2}}(\gamma+\log k)^3\sum_{r|k}\frac{\tau_3(r)}{r^{\frac{1}{2}}},$$

d'où:

$$E_{b,k} \ll k^{\frac{7}{2}}\tau_3(k)\tau(k)\log^3 k.$$

– Comme on a:

$$E\Big(s,\frac{h}{k}\Big) = \frac{1}{2\pi^3k^2}(2\pi)^{3s}\Gamma^3(1-s)\Big\{\Big[\Big(\sin\frac{s\pi}{2}\Big)^3+i\Big(\cos\frac{s\pi}{2}\Big)^3\Big]\Big[\frac{A_{-\overline{h},k}}{s^3}+\frac{B_{-\overline{h},k}}{s^2}+\frac{C_{-\overline{h},k}}{s}$$

$$+D_{-\overline{h},k}+E_{-\overline{h},k}+\dots\Big]+\Big[\Big(\sin\frac{s\pi}{2}\Big)^3-i\Big(\cos\frac{s\pi}{2}\Big)^3\Big]\Big[\frac{A_{\overline{h},k}}{s^3}+\frac{B_{\overline{h},k}}{s^2}+\frac{C_{\overline{h},k}}{s}+D_{\overline{h},k}+E_{\overline{h},k}+\dots\Big]\Big\},$$

les majorations obtenues précédemment donnent lorsque l'on calcule le terme constant du développement en série de Laurent:

$$E\Big(0,\frac{h}{k}\Big) \ll k^{\frac{3}{2}}\tau_3(k)\tau(k)\log^3 k,$$

ce qui termine la démonstration.

4. Quelques propriétés des fonctions spéciales

a) La fonction gamma d'Euler

Rappelons d'abord la formule de Stirling dans le domaine complexe:

Lemme 13. *Soit $\delta < \pi$ un réel strictement positif fixé. Alors:*

$$\Gamma(s) = \sqrt{2\pi}\exp\Big[\Big(s-\frac{1}{2}\Big)\log s - s\Big]\Big(1+\mathcal{O}\Big(\frac{1}{|s|}\Big)\Big) \tag{67}$$

dans le secteur $|\arg(s)| \le \pi-\delta$, $|s| \ge 1$.

On en déduit le comportement asymptotique dans une bande verticale:

Lemme 14. *Dans toute bande verticale fixée $A \le \sigma \le B$, on a:*

$$\textit{pour } t \ge 1: \quad \Gamma(s) = \sqrt{2\pi}t^{s-\frac{1}{2}}\exp\Big(-\frac{\pi t}{2}-it+\frac{\pi}{2}\Big(\sigma-\frac{1}{2}\Big)i\Big)\Big(1+\mathcal{O}\Big(\frac{1}{t}\Big)\Big), \tag{68}$$

$$\textit{pour } t \le -1: \quad \Gamma(s) = \sqrt{2\pi}(-t)^{s-\frac{1}{2}}\exp\Big(\frac{\pi t}{2}-it-\frac{\pi}{2}\Big(\sigma-\frac{1}{2}\Big)i\Big)\Big(1+\mathcal{O}\Big(\frac{1}{-t}\Big)\Big). \tag{69}$$

Preuve :

– Supposons d'abord $t \ge 1$. Comme $A \le \sigma \le B$, il existe $\delta > 0$ tel que pour tout s dans la bande et tel que $|t| \ge 1$, on ait $|s| \ge 1$ et $|\arg(s)| \le \pi-\delta$. Donc, d'après le lemme 13, on a:

$$\Gamma(s) = \sqrt{2\pi}\exp\Big[\Big(\sigma+it-\frac{1}{2}\Big)\log(\sigma+it)-\sigma-it\Big]\Big(1+\mathcal{O}\Big(\frac{1}{t}\Big)\Big).$$

Or on a:

$$\log(\sigma+it)=\log t+\frac{i\pi}{2}+\log\Big(1-\frac{i\sigma}{t}\Big)=\log t+\frac{i\pi}{2}-\frac{i\sigma}{t}+\mathcal{O}\Big(\frac{1}{t^2}\Big),$$

d'où:

$$\Gamma(s)=\sqrt{2\pi}\exp\Big[\Big(s-\frac12\Big)\log t-\frac{\pi t}{2}-it+\frac{\pi}{2}\Big(\sigma-\frac12\Big)i-\frac{i\sigma}{t}\Big(\sigma-\frac12\Big)+\mathcal{O}\Big(\frac{1}{t^2}\Big)\Big]\Big(1+\mathcal{O}\Big(\frac1t\Big)\Big).$$

Comme

$$\exp\Big(-\frac{i\sigma}{t}\Big(\sigma-\frac12\Big)+\mathcal{O}\Big(\frac{1}{t^2}\Big)\Big)=1+\mathcal{O}\Big(\frac1t\Big),$$

on trouve:

$$\Gamma(s)=\sqrt{2\pi}t^{s-\frac12}\exp\Big(-\frac{\pi t}{2}-it+\frac{\pi}{2}\Big(\sigma-\frac12\Big)i\Big)\Big(1+\mathcal{O}\Big(\frac1t\Big)\Big).$$

– Supposons maintenant $t\le -1$. Alors:

$$\Gamma(s)=\overline{\Gamma(\overline{s})}=\overline{\Gamma(\sigma-it)}.$$

Donc, d'après la formule (68):

$$\Gamma(s)=\overline{\sqrt{2\pi}(-t)^{\overline{s}-\frac12}\exp\Big(\frac{\pi t}{2}+it+\frac{\pi}{2}\Big(\sigma-\frac12\Big)i\Big)\Big(1+\mathcal{O}\Big(\frac{1}{-t}\Big)\Big)},$$

ce qui donne bien (69).

Lemme 15. *Dans toute bande verticale fixée $A\le\sigma\le B$, on a pour $t\ge 1$:*

$$\Gamma(1-s)\sin\frac{s\pi}{2}=\frac{1+i}{2}\sqrt{\pi}t^{\frac12-s}\exp(it)\Big(1+\mathcal{O}\Big(\frac1t\Big)\Big),\tag{70}$$

$$\Gamma(1-s)\cos\frac{s\pi}{2}=\frac{1-i}{2}\sqrt{\pi}t^{\frac12-s}\exp(it)\Big(1+\mathcal{O}\Big(\frac1t\Big)\Big),\tag{71}$$

$$\Gamma^3(1-s)\Big(\sin\frac{s\pi}{2}\Big)^3=\frac{i-1}{4}\pi^{\frac32}t^{\frac32-3s}\exp(3it)\Big(1+\mathcal{O}\Big(\frac1t\Big)\Big),\tag{72}$$

$$\Gamma^3(1-s)\Big(\cos\frac{s\pi}{2}\Big)^3=-\frac{1+i}{4}\pi^{\frac32}t^{\frac32-3s}\exp(3it)\Big(1+\mathcal{O}\Big(\frac1t\Big)\Big),\tag{73}$$

et pour $t\le -1$:

$$\Gamma(1-s)\sin\frac{s\pi}{2}=\frac{1-i}{2}\sqrt{\pi}(-t)^{\frac12-s}\exp(it)\Big(1+\mathcal{O}\Big(\frac{1}{-t}\Big)\Big),\tag{74}$$

$$\Gamma(1-s)\cos\frac{s\pi}{2}=\frac{1+i}{2}\sqrt{\pi}(-t)^{\frac12-s}\exp(it)\Big(1+\mathcal{O}\Big(\frac{1}{-t}\Big)\Big),\tag{75}$$

$$\Gamma^3(1-s)\Big(\sin\frac{s\pi}{2}\Big)^3=-\frac{1+i}{4}\pi^{\frac32}(-t)^{\frac32-3s}\exp(3it)\Big(1+\mathcal{O}\Big(\frac{1}{-t}\Big)\Big),\tag{76}$$

$$\Gamma^3(1-s)\Big(\cos\frac{s\pi}{2}\Big)^3=\frac{i-1}{4}\pi^{\frac32}(-t)^{\frac32-3s}\exp(3it)\Big(1+\mathcal{O}\Big(\frac{1}{-t}\Big)\Big).\tag{77}$$

Preuve :

– D'après (69), on a, pour $t\ge 1$:

$$\Gamma(1-s)=\sqrt{2\pi}t^{\frac12-s}\exp\Big(-\frac{\pi t}{2}+it-\frac{\pi}{2}\Big(\frac12-\sigma\Big)i\Big)\Big(1+\mathcal{O}\Big(\frac1t\Big)\Big).$$

Comme on a:

$$\sin\frac{s\pi}{2}=\frac{1}{2i}\Big[\exp\Big(\frac{i\sigma\pi}{2}-\frac{\pi t}{2}\Big)-\exp\Big(-\frac{i\sigma\pi}{2}+\frac{\pi t}{2}\Big)\Big]=\frac{i}{2}\exp\Big(\frac{\pi t}{2}-\frac{i\pi\sigma}{2}\Big)\Big(1+\mathcal{O}\Big(\frac{1}{t}\Big)\Big),$$

on trouve:

$$\Gamma(1-s)\sin\frac{s\pi}{2}=\frac{i}{2}\exp\Big(-\frac{\pi}{4}\Big)\sqrt{2\pi}t^{\frac{1}{2}-s}\exp(it)\Big(1+\mathcal{O}\Big(\frac{1}{t}\Big)\Big),$$

d'où (70). De même on a:

$$\cos\frac{s\pi}{2}=\frac{1}{2}\exp\Big(\frac{\pi t}{2}-\frac{i\pi\sigma}{2}\Big)\Big(1+\mathcal{O}\Big(\frac{1}{t}\Big)\Big),$$

ce qui donne:

$$\Gamma(1-s)\cos\frac{s\pi}{2}=\frac{1}{2}\exp\Big(-\frac{\pi}{4}\Big)\sqrt{2\pi}t^{\frac{1}{2}-s}\exp(it)\Big(1+\mathcal{O}\Big(\frac{1}{t}\Big)\Big),$$

d'où (71).

– On en déduit immédiatement (72) et (73). Les formules (74), (75), (76) et (77) découlent des quatre précédentes en remplaçant s par $\overline{s}$, puis en prenant le conjugué.

b) Fonctions de Bessel

On utilisera les fonctions de Bessel K_n et Y_n pour n entier naturel, définies par exemple par les développements en série suivants:

$$K_n(z)=\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(-1)^k(n-k-1)!}{k!}\Big(\frac{z}{2}\Big)^{2k-n}+\frac{(-1)^{n-1}}{2}\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{\big(\frac{z}{2}\big)^{2k+n}}{k!(n+k)!}\Big(2\log\frac{z}{2}-\psi(k+1)-\psi(k+n+1)\Big)$$

$$Y_n(z)=-\frac{1}{\pi}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(n-k-1)!}{k!}\Big(\frac{z}{2}\Big)^{2k-n}+\frac{1}{\pi}\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(-1)^k\big(\frac{z}{2}\big)^{2k+n}}{k!(n+k)!}\Big(2\log\frac{z}{2}-\psi(k+1)-\psi(k+n+1)\Big),$$

où on pose, pour tout n entier naturel:

$$\psi(n+1):=-\gamma+\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}.$$

Les résultats suivants peuvent se trouver dans [29], chapitre 7.

Lemme 16. *Soit $\delta>0$ fixé. Alors pour $x\geq\delta$, on a:*

$$K_n(x)=\Big(\frac{\pi}{2x}\Big)^{\frac{1}{2}}e^{-x}\Big(1+\mathcal{O}\Big(\frac{1}{x}\Big)\Big) \tag{78}$$

$$Y_n(x)=\Big(\frac{2}{\pi x}\Big)^{\frac{1}{2}}\sin\Big(x-\frac{\pi n}{2}-\frac{\pi}{4}\Big)+\mathcal{O}\big(x^{-\frac{3}{2}}\big). \tag{79}$$

Lemme 17.

$$\big(x^nK_n(x)\big)'=-x^nK_{n-1}(x). \tag{80}$$

$$\big(x^nY_n(x)\big)'=x^nY_{n-1}(x). \tag{81}$$

c) Transformées de Mellin classiques

On va voir que Γ est liée aux fonctions de Bessel par la transformée de Mellin.

Lemme 18. *Pour $\frac{1}{4} < \sigma < 1$, on a:*

$$\pi \int_0^{+\infty} Y_0(2\sqrt{u}) u^{-s} du = \Gamma^2(1-s)\cos \pi s. \tag{82}$$

PREUVE :

– D'après [25], chapitre 7, on a, dès que $|\nu| < \sigma < \frac{3}{2}$:

$$\int_0^{+\infty} Y_\nu(x) x^{s-1} dx = -2^{s-1}\pi^{-1}\Gamma\Big(\frac{s}{2}+\frac{\nu}{2}\Big)\Gamma\Big(\frac{s}{2}-\frac{\nu}{2}\Big)\cos\Big(\frac{s-\nu}{2}\pi\Big).$$

En particulier, pour $\nu = 0$, on a:

$$-2^{s-1}\pi^{-1}\Gamma^2\Big(\frac{s}{2}\Big)\cos\Big(\frac{s\pi}{2}\Big) = \int_0^{+\infty} Y_0(x) x^{s-1} dx \qquad \Big(0 < \sigma < \frac{3}{2}\Big).$$

– Posons $x = 2\sqrt{u}$ et $s' = \frac{s}{2}$. On obtient:

$$-2^{2s'-1}\pi^{-1}\Gamma^2(s')\cos(s'\pi) = \int_0^{+\infty} Y_0(2\sqrt{u})(2\sqrt{u})^{2s'-1}\frac{du}{\sqrt{u}} \qquad \Big(0 < \sigma' < \frac{3}{4}\Big),$$

soit:

$$-\frac{1}{\pi}\Gamma^2(s)\cos(\pi s) = \int_0^{+\infty} Y_0(2\sqrt{u}) u^{s-1} du \qquad \Big(0 < \sigma < \frac{3}{4}\Big).$$

Le lemme en résulte en prenant $s' = 1 - s$.

Lemme 19. *Pour $\sigma < 1$, on a:*

$$2\int_0^{+\infty} K_0(2\sqrt{u}) u^{-s} du = \Gamma^2(1-s). \tag{83}$$

PREUVE :

– D'après [25], chapitre 7, on a, dès que $\sigma > \max(0, -2\nu)$:

$$\int_0^{+\infty} x^\nu K_\nu(x) x^{s-1} dx = 2^{s+\nu-2}\Gamma\Big(\frac{s}{2}\Big)\Gamma\Big(\frac{s}{2}+\nu\Big).$$

En particulier, pour $\nu = 0$:

$$2^{s-2}\Gamma^2\Big(\frac{s}{2}\Big) = \int_0^{+\infty} K_0(x) x^{s-1} dx \qquad (\sigma > 0).$$

– On pose $x = 2\sqrt{u}$ et $s' = \frac{s}{2}$, d'où:

$$2^{2s'-2}\Gamma^2(s') = \int_0^{+\infty} K_0(2\sqrt{u})(2\sqrt{u})^{2s'-1}\frac{du}{\sqrt{u}} \qquad (\sigma' > 0),$$

soit:

$$\Gamma^2(s) = 2\int_0^{+\infty} K_0(2\sqrt{u}) u^{s-1} du \qquad (\sigma > 0),$$

d'où le lemme en prenant $s' = 1 - s$.

Lemme 20. *Pour* $-\frac{1}{2} \leq c < 1$, *on a:*

$$\forall x > 0, \quad \sin x = \frac{1}{2i\pi} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{\Gamma(1-s)\sin\frac{s\pi}{2}}{s} x^s ds. \tag{84}$$

PREUVE :

– D'après [25], chapitre 7, on a, quand $-1 < c \leq \frac{1}{2}$:

$$\sin x = \frac{1}{2i\pi} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \Gamma(s)\Big(\sin\frac{\pi s}{2}\Big) x^{-s} ds.$$

– On pose $s' = -s$, ce qui donne:

$$\begin{aligned}
\sin x &= \frac{1}{2i\pi} \int_{-c+i\infty}^{-c-i\infty} \Gamma(-s')\Big(\sin\frac{\pi s'}{2}\Big) x^{s'} ds' \qquad (-1 < c \leq \frac{1}{2}) \\
&= \frac{-1}{2i\pi} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \Gamma(-s)\Big(\sin\frac{\pi s}{2}\Big) x^{s} ds \qquad (-\frac{1}{2} \leq c < 1) \\
&= \frac{1}{2i\pi} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{\Gamma(1-s)\sin\frac{\pi s}{2}}{s} x^{s} ds \qquad (-\frac{1}{2} \leq c < 1).
\end{aligned}$$

Lemme 21. *Pour* $-\frac{1}{2} \leq c < 0$, *on a:*

$$\forall x > 0, \quad -\cos x = \frac{1}{2i\pi} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{\Gamma(1-s)\cos\frac{s\pi}{2}}{s} x^s ds. \tag{85}$$

PREUVE :

– D'après [25], chapitre 7, on a, quand $0 < c \leq \frac{1}{2}$:

$$\cos x = \frac{1}{2i\pi} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \Gamma(s)\Big(\cos\frac{s\pi}{2}\Big) x^{-s} ds.$$

– On pose $s' = -s$, ce qui donne:

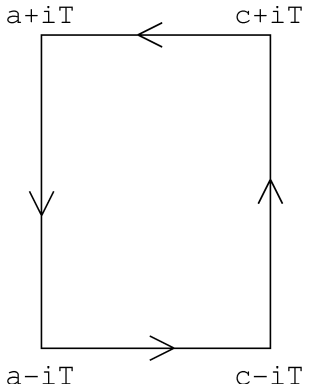
$$\begin{aligned}
\cos x &= \frac{-1}{2i\pi} \int_{-c+i\infty}^{-c-i\infty} \Gamma(-s')\Big(\cos\frac{\pi s'}{2}\Big) x^{s'} ds' \qquad (0 < c \leq \frac{1}{2}) \\
&= \frac{1}{2i\pi} \int_{-c-i\infty}^{-c+i\infty} \Gamma(-s)\Big(\cos\frac{\pi s}{2}\Big) x^{s} ds \qquad (0 < c \leq \frac{1}{2}) \\
&= \frac{-1}{2i\pi} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{\Gamma(1-s)\cos\frac{\pi s}{2}}{s} x^{s} ds \qquad (-\frac{1}{2} \leq c < 0).
\end{aligned}$$

Corollaire 2. *Pour* $0 < c < 1$, *on a:*

$$\forall x > 0, \;\; 1 - \cos x = \frac{1}{2i\pi} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{\Gamma(1-s)\cos\frac{s\pi}{2}}{s} x^s ds. \tag{86}$$

PREUVE :

– Prenons $a \in \big[-\frac{1}{2}, 0\big[$ quelconque, et considérons le contour $\mathcal{C}_T$ suivant, où $T > 0$:



D'après le théorème des résidus, on a:

$$\frac{1}{2i\pi}\int_{\mathcal{C}_T}\frac{\Gamma(1-s)\cos\frac{s\pi}{2}}{s}x^s ds = 1.$$

Si on montre que:

$$\lim_{T\to+\infty}\frac{1}{2i\pi}\int_{[a\pm iT,c\pm iT]}\frac{\Gamma(1-s)\cos\frac{s\pi}{2}}{s}x^s ds = 0,$$

on aura:

$$1 = \frac{1}{2i\pi}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty}\frac{\Gamma(1-s)\cos\frac{s\pi}{2}}{s}x^s ds - \frac{1}{2i\pi}\int_{a-i\infty}^{a+i\infty}\frac{\Gamma(1-s)\cos\frac{s\pi}{2}}{s}x^s ds$$

$$= \frac{1}{2i\pi}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty}\frac{\Gamma(1-s)\cos\frac{s\pi}{2}}{s}x^s ds + \cos x,$$

ce qui donne (86).

– Or, d'après les estimations (71) et (75), on a:

$$\frac{\Gamma(1-s)\cos\frac{s\pi}{2}}{s} \ll |t|^{-\frac{1}{2}-\sigma},$$

d'où:

$$\frac{1}{2i\pi}\int_{[a\pm iT,c\pm iT]}\frac{\Gamma(1-s)\cos\frac{s\pi}{2}}{s}x^s ds \ll \int_a^c T^{-\frac{1}{2}-\sigma}x^\sigma d\sigma \ll \Big[\frac{T^{-\frac{1}{2}-\sigma}x^\sigma}{\log x-\log T}\Big]_a^c \ll \frac{1}{\log T},$$

car $a \geq -\frac{1}{2}$, d'où le résultat.

5. Sommes liées à τ_3

Dans la suite, certaines sommes faisant intervenir la quantité $\tau_3(r)(r,k)^{\frac{1}{2}}$ interviendront fréquemment. Les lemmes techniques suivants seront utiles:

Lemme 22.

$$\sum_{r\leq N}\frac{\tau_3(r)(r,k)^{\frac{1}{2}}}{r^\alpha} \ll \begin{cases}\tau(k)N^{1-\alpha}\log^2 N & si\ 0\leq\alpha<1,\\ \tau(k)\log^3 N & si\ \alpha=1,\\ \tau(k) & si\ \alpha>1.\end{cases}$$

PREUVE :

- Posons
$$M := \sum_{r\leq N} \frac{\tau_3(r)(r,k)^{\frac{1}{2}}}{r^\alpha}.$$
On a:
$$M = \sum_{d|k} d^{\frac{1}{2}} \sum_{\substack{r\leq N\\(r,k)=d}} \frac{\tau_3(r)}{r^\alpha},$$
soit, en prenant $u = \frac{r}{d}$:
$$M = \sum_{d|k} d^{\frac{1}{2}} \sum_{\substack{u\leq \frac{N}{d}\\(u,\frac{k}{d})=1}} \frac{\tau_3(ud)}{(ud)^\alpha} \leq \sum_{d|k} d^{\frac{1}{2}-\alpha}\tau_3(d) \sum_{u\leq \frac{N}{d}} \frac{\tau_3(u)}{u^\alpha}.$$

- Soit
$$P := \sum_{u\leq \frac{N}{d}} \frac{\tau_3(u)}{u^\alpha}.$$
En sommant par parties, on trouve:
$$P = \frac{d^\alpha}{N^\alpha} \sum_{u\leq \frac{N}{d}} \tau_3(u) + \alpha \int_1^{\frac{N}{d}} \frac{dt}{t^{\alpha+1}} \sum_{u\leq t} \tau_3(u) \ll \Big(\frac{N}{d}\Big)^{1-\alpha} \log^2 N + \int_1^{\frac{N}{d}} \frac{\log^2 t}{t^\alpha} dt.$$

- 1$^{\text{er}}$ cas: $0 < \alpha < 1$.
On a alors:
$$\int_1^{\frac{N}{d}} \frac{\log^2 t}{t^\alpha} dt \ll \Big(\frac{N}{d}\Big)^{1-\alpha} \log^2 N,$$
donc:
$$P \ll \Big(\frac{N}{d}\Big)^{1-\alpha} \log^2 N,$$
puis:
$$M \ll N^{1-\alpha} \log^2 N \sum_{d|k} \frac{\tau_3(d)}{\sqrt{d}} \ll \tau(k) N^{1-\alpha} \log^2 N.$$

- 2ème cas: $\alpha = 1$.
On a alors:
$$\int_1^{\frac{N}{d}} \frac{\log^2 t}{t} dt \ll \log^3 N,$$
donc:
$$P \ll \log^3 N,$$
puis:
$$M \ll \log^3 N \sum_{d|k} \frac{\tau_3(d)}{\sqrt{d}} \ll \tau(k) \log^3 N.$$

- 3ème cas: $\alpha > 1$.
On a alors:
$$\int_1^{\frac{N}{d}} \frac{\log^2 t}{t^\alpha} dt \ll 1,$$
donc:
$$P \ll 1 + \Big(\frac{N}{d}\Big)^{1-\alpha} \log^2 N \ll 1,$$

puis:

$$M \ll \sum_{d|k} \frac{\tau_3(d)}{d^{\alpha-\frac{1}{2}}} \ll \tau(k).$$

Lemme 23. *Dans le cas où $\alpha > 1$, on a:*

$$\sum_{r \geq N+1} \frac{\tau_3(r)(k,r)^{\frac{1}{2}}}{r^\alpha} \ll \tau(k) N^{1-\alpha} \log^2 N.$$

PREUVE :

– Soit

$$Q := \sum_{r \geq N+1} \frac{\tau_3(r)(k,r)^{\frac{1}{2}}}{r^\alpha}.$$

On a:

$$Q = \sum_{d|k} d^{\frac{1}{2}} \sum_{\substack{r \geq N+1 \\ (r,k)=d}} \frac{\tau_3(r)}{r^\alpha},$$

soit, en posant $u = \frac{r}{d}$:

$$Q = \sum_{d|k} d^{\frac{1}{2}} \sum_{\substack{u \geq \frac{N+1}{d} \\ (u, \frac{k}{d})=1}} \frac{\tau_3(ud)}{(ud)^\alpha} \leq \sum_{d|k} d^{\frac{1}{2}-\alpha} \tau_3(d) \sum_{u \geq \frac{N+1}{d}} \frac{\tau_3(u)}{u^\alpha}.$$

– En sommant par parties, on trouve:

$$\sum_{u \geq \frac{N+1}{d}} \frac{\tau_3(u)}{u^\alpha} = \alpha \int_{\frac{N+1}{d}}^{+\infty} \frac{dt}{t^{\alpha+1}} \sum_{\frac{N+1}{d} \leq u \leq t} \tau_3(u) \ll \int_{\frac{N+1}{d}}^{+\infty} \frac{\log^2 t}{t^\alpha} dt \ll \Big(\frac{N}{d}\Big)^{1-\alpha} \log^2 N,$$

d'où:

$$Q \ll \tau(k) N^{1-\alpha} \log^2 N.$$

Lemme 24. *Pour $\alpha > 1$, on a:*

$$\sum_{r \geq N+k} \frac{\tau_3(r)(k,r)^{\frac{1}{2}}}{r^\alpha} \Big(1 + \frac{1}{\log \frac{r}{N+\frac{1}{2}}}\Big) \ll_\varepsilon N^{1+\varepsilon-\alpha} \tau(k).$$

PREUVE :

– Pour $r > 2N$, on a $\frac{r}{N+\frac{1}{2}} \geq 2$. Donc:

$$\sum_{r \geq N+k} \frac{\tau_3(r)(k,r)^{\frac{1}{2}}}{r^\alpha} \Big(1 + \frac{1}{\log \frac{r}{N+\frac{1}{2}}}\Big) \ll \sum_{r \geq N+1} \frac{\tau_3(r)(k,r)^{\frac{1}{2}}}{r^\alpha} + \sum_{N+k \leq r \leq 2N} \frac{\tau_3(r)(k,r)^{\frac{1}{2}}}{r^\alpha \log \frac{r}{N+\frac{1}{2}}}.$$

La première somme se majore grâce au lemme 23.

– Soit R la seconde somme. On a:

$$R \leq \sum_{d|k} \frac{\tau_3(d)}{d^{\alpha-\frac{1}{2}}} \sum_{\frac{N+k}{d} \leq u \leq \frac{2N}{d}} \frac{\tau_3(u)}{u^\alpha \log \frac{ud}{N+\frac{1}{2}}}.$$

Or

$$\log \frac{ud}{N+\frac{1}{2}} \gg \frac{ud - N - \frac{1}{2}}{N+\frac{1}{2}},$$

donc:

$$R \ll_\varepsilon N^{1+\varepsilon-\alpha} \sum_{d|k} \frac{\tau_3(d)}{\sqrt{d}} \sum_{\frac{N+k}{d} \leq u \leq \frac{2N}{d}} \frac{1}{u - \frac{1}{d}\big(N+\frac{1}{2}\big)},$$

puis:

$$R \ll_\varepsilon N^{1+\varepsilon-\alpha} \tau(k).$$

Lemme 25. *Pour $\alpha < 1$, on a:*

$$\sum_{r \leq N-k} \frac{\tau_3(r)(k,r)^{\frac{1}{2}}}{r^\alpha} \Big(1 + \frac{1}{\log \frac{N+\frac{1}{2}}{r}}\Big) \ll_\varepsilon N^{1+\varepsilon-\alpha} \tau(k).$$

PREUVE : On utilise la majoration

$$\frac{1}{\log \frac{N+\frac{1}{2}}{r}} \ll \frac{r}{N+\frac{1}{2}-r},$$

ce qui donne:

$$\sum_{r \leq N-k} \frac{\tau_3(r)(k,r)^{\frac{1}{2}}}{r^\alpha} \Big(1 + \frac{1}{\log \frac{N+\frac{1}{2}}{r}}\Big) \ll \sum_{r \leq N} \frac{\tau_3(r)(k,r)^{\frac{1}{2}}}{r^\alpha} + \sum_{r \leq N-k} \frac{\tau_3(r)(k,r)^{\frac{1}{2}} r^{1-\alpha}}{N+\frac{1}{2}-r}.$$

La première somme se majore par le lemme 22. La seconde est majorée par:

$$\sum_{d|k} \frac{\tau_3(d)}{d^{\alpha-\frac{1}{2}}} \sum_{u \leq \frac{N-k}{d}} \frac{\tau_3(u) u^{1-\alpha}}{\frac{1}{d}\big(N+\frac{1}{2}\big) - u} \ll_\varepsilon N^{1+\varepsilon-\alpha} \sum_{d|k} \frac{\tau_3(d)}{\sqrt{d}},$$

d'où le résultat.

6. Transformation de la somme

– On commence par fixer $\delta > 0$. Rappelons la formule de Perron effective:

Théorème D. *On considère la série de Dirichlet*

$$f(s) := \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n}{n^s} \quad (\sigma > 1),$$

où $a_n = \mathcal{O}(\psi(n))$, avec ψ croissante, et:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{|a_n|}{n^\sigma} = \mathcal{O}\Big(\frac{1}{(\sigma-1)^\alpha}\Big) \quad (\sigma \to 1)$$

Alors, si $c > 1$ et si N désigne l'entier le plus proche de x, on a pour x non entier:

$$\sum_{n \leq x} a_n = \frac{1}{2i\pi} \int_{c-iT}^{c+iT} f(\omega) \frac{x^\omega}{\omega} d\omega + \mathcal{O}\Big(\frac{x^c}{T(c-1)^\alpha}\Big) + \mathcal{O}\Big(\frac{\psi(2x) x \log x}{T}\Big) + \mathcal{O}\Big(\frac{\psi(N)x}{T|x-N|}\Big), \tag{87}$$

et pour x entier naturel:

$$\sum_{n \leq x-1} a_n + \frac{1}{2} a_x = \frac{1}{2i\pi} \int_{c-iT}^{c+iT} f(\omega) \frac{x^\omega}{\omega} d\omega + \mathcal{O}\Big(\frac{x^c}{T(c-1)^\alpha}\Big) + \mathcal{O}\Big(\frac{\psi(2x) x \log x}{T}\Big) + \mathcal{O}\Big(\frac{\psi(x)}{T}\Big). \tag{88}$$

C'est le cas particulier $s=0$ du lemme 3.12 de [26].
On applique le théorème avec $f(s)=E\big(s,\frac{h}{k}\big)$, $a_n=\tau_3(n)e\big(n\frac{h}{k}\big)$, $\psi(x)=x^{\frac{\delta}{2}}$, $\alpha=3$ et $c=1+\delta$. D'après (88), on peut écrire:

$$D\Big(x,\frac{h}{k}\Big)=D\Big(\lfloor x\rfloor,\frac{h}{k}\Big)=\frac{1}{2i\pi}\int_{1+\delta-iT}^{1+\delta+iT}E\Big(s,\frac{h}{k}\Big)\frac{x^s}{s}ds+\mathcal{O}\Big(\frac{x^{1+\delta}}{T}\Big)+\mathcal{O}\big(\tau_3(\lfloor x\rfloor)\big).$$

Si on suppose $T\ll x$, comme $\tau_3(\lfloor x\rfloor)\ll x^{\delta}$, on obtient:

$$D\Big(x,\frac{h}{k}\Big)=\frac{1}{2i\pi}\int_{1+\delta-iT}^{1+\delta+iT}E\Big(s,\frac{h}{k}\Big)\frac{x^s}{s}ds+\mathcal{O}\Big(\frac{x^{1+\delta}}{T}\Big). \tag{89}$$

– L'étape suivante consiste à déplacer le contour d'intégration vers le segment vertical $\{\sigma=-\delta,\ |t|\le T\}$. Pour cela, on a besoin d'une estimation de $E\big(s,\frac{h}{k}\big)$ dans la bande $-\delta\le\sigma\le 1+\delta$ pour $|t|\ge 1$.
Considérons la fonction auxiliaire:

$$\tilde{E}\Big(s,\frac{h}{k}\Big):=\Big(\frac{s-1}{s-2}\Big)^3E\Big(s,\frac{h}{k}\Big)\Big[k^{\frac{3}{2}}\big(\tau(k)\tau_3(k)\big)^{\frac{1}{1+2\delta}}\Big]^{s-1-\delta}.$$

Elle est holomorphe dans la bande $-\delta\le\sigma\le 1+\delta$.
Sur la droite $\{\sigma=1+\delta\}$, on a:

$$\tilde{E}\Big(s,\frac{h}{k}\Big)\ll\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\tau_3(n)}{n^{1+\delta}}\ll 1.$$

Sur la droite $\{\sigma=-\delta\}$, on a d'après le lemme 4:

$$E\Big(s,\frac{h}{k}\Big)=\frac{k}{2\pi^3}\Big(\frac{2\pi}{k}\Big)^{3s}\Gamma^3(1-s)\Big\{\Big(\sin\frac{s\pi}{2}\Big)^3\sum_{r=1}^{+\infty}\frac{1}{r^{1-s}}\sum_{lmn=r}\big(K_{-\overline{h},k}+K_{\overline{h},k}\big)(l,m,n)$$

$$+i\Big(\cos\frac{s\pi}{2}\Big)^3\sum_{r=1}^{+\infty}\frac{1}{r^{1-s}}\sum_{lmn=r}\big(K_{-\overline{h},k}-K_{\overline{h},k}\big)(l,m,n)\Big\}.$$

Or d'après le lemme 11, on a:

$$\big|K_{\pm\overline{h},k}(l,m,n)\big|\le\tau_3(k)k^{\frac{1}{2}}(k,lmn)^{\frac{1}{2}},$$

et d'après les formules (72), (73), (76) et (77), on a pour $|t|\ge 1$:

$$\Gamma^3(1-s)\Big(\sin\frac{s\pi}{2}\Big)^3\ll|t|^{\frac{3}{2}+3\delta}$$

et

$$\Gamma^3(1-s)\Big(\cos\frac{s\pi}{2}\Big)^3\ll|t|^{\frac{3}{2}+3\delta},$$

ce qui donne:

$$E\Big(s,\frac{h}{k}\Big)\ll\big(k|t|\big)^{\frac{3}{2}+3\delta}\tau_3(k)\sum_{r=1}^{+\infty}\frac{\tau_3(r)(r,k)^{\frac{1}{2}}}{r^{1+\delta}}.$$

Donc sur $\{\sigma=-\delta\}$, on a, d'après le lemme 22:

$$E\Big(s,\frac{h}{k}\Big)\ll\big(k(1+|t|)\big)^{\frac{3}{2}+3\delta}\tau_3(k)\tau(k),$$

d'où:

$$\tilde{E}\Big(s,\frac{h}{k}\Big)\ll\big(1+|t|\big)^{\frac{3}{2}+3\delta}.$$

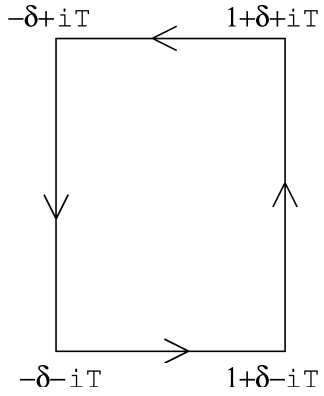
– Le principe de Phragmen-Lindelöf permet d'en déduire que, pour $-\delta \leq \sigma \leq 1+\delta$:

$$\tilde{E}\Big(s,\frac{h}{k}\Big) \ll \big(1+|t|\big)^{\frac{3}{2}(1+\delta-\sigma)},$$

puis que pour $-\delta \leq \sigma \leq 1+\delta$ et $|t| \geq 1$:

$$E\Big(s,\frac{h}{k}\Big) \ll \big(k|t|\big)^{\frac{3}{2}(1+\delta-\sigma)} \big(\tau(k)\tau_3(k)\big)^{\frac{1+\delta-\sigma}{1+2\delta}}. \tag{90}$$

– Soit $\mathcal{C}$ le contour rectangulaire suivant:



D'après le théorème des résidus, on a:

$$\frac{1}{2i\pi}\int_{\mathcal{C}} E\Big(s,\frac{h}{k}\Big)\frac{x^s}{s}ds = \mathrm{Res}\Big(E\Big(s,\frac{h}{k}\Big)\frac{x^s}{s},s=1\Big) + E\Big(0,\frac{h}{k}\Big).$$

Estimons les intégrales sur les segments horizontaux. La majoration (90) permet d'obtenir:

$$\int_{[-\delta\pm iT,1+\delta\pm iT]} E\Big(s,\frac{h}{k}\Big)\frac{x^s}{s}ds \ll_\varepsilon \int_{-\delta}^{1+\delta} \big(k^{1+\varepsilon}T\big)^{\frac{3}{2}(1+\delta-\sigma)}\frac{x^\sigma}{T}d\sigma.$$

On suppose alors:

$$1 \leq T \ll \frac{x^{\frac{2}{3}}}{k},$$

ce qui donne:

$$\int_{[-\delta\pm iT,1+\delta\pm iT]} E\Big(s,\frac{h}{k}\Big)\frac{x^s}{s}ds \ll_\varepsilon k^{\frac{3}{2}\varepsilon(1+2\delta)}\frac{x^{1+\delta}}{T} \ll_\varepsilon \frac{x^{1+\delta+\varepsilon(1+2\delta)}}{T},$$

car $k \leq x^{\frac{2}{3}}$. Donc, en prenant $\varepsilon \leq \frac{\delta}{1+2\delta}$:

$$\int_{[-\delta\pm iT,1+\delta\pm iT]} E\Big(s,\frac{h}{k}\Big)\frac{x^s}{s}ds \ll \frac{x^{1+2\delta}}{T}.$$

et:

$$D\Big(x,\frac{h}{k}\Big) = \frac{1}{2i\pi}\int_{-\delta-iT}^{-\delta+iT} E\Big(s,\frac{h}{k}\Big)\frac{x^s}{s}ds + \mathrm{Res}\Big(E\Big(s,\frac{h}{k}\Big)\frac{x^s}{s},s=1\Big) + E\Big(0,\frac{h}{k}\Big) + \mathcal{O}\Big(\frac{x^{1+2\delta}}{T}\Big).$$

– Or en utilisant le lemme 10, on a, au voisinage de $s=1$:

$$E\Big(s,\frac{h}{k}\Big)\frac{x^s}{s} = x\big[1+(s-1)\log x+\frac{1}{2}(s-1)^2\log^2 x+\ldots\big]\big[1-(s-1)+(s-1)^2+\ldots\big]$$

$$\times\frac{1}{k}\Big[\frac{c_{-3}}{(s-1)^3}+\frac{c_{-2}-c_{-3}\log k}{(s-1)^2}+\frac{c_{-1}-c_{-2}\log k+\frac{1}{2}c_{-3}\log^2 k}{s-1}+\dots\Big],$$

ce qui donne:

$$\mathrm{Res}\Big(E\Big(s,\frac{h}{k}\Big)\frac{x^s}{s},s=1\Big)=\frac{x}{k}\Big\{\frac{1}{2}c_{-3}\log^2 x+\big[c_{-2}-c_{-3}\log k-c_{-3}\big]\log x$$
$$+\Big[c_{-1}-c_{-2}\log k+\frac{1}{2}c_{-3}\log^2 k-c_{-2}+c_{-3}\log k+c_{-3}\Big]\Big\}.$$

Donc si on pose:

$$\Delta\Big(x,\frac{h}{k}\Big):=D\Big(x,\frac{h}{k}\Big)-\frac{x}{k}\Big\{\frac{1}{2}c_{-3}\log^2 x-\big[c_{-3}\log k+(c_{-3}-c_{-2})\big]\log x$$
$$+\Big[\frac{1}{2}c_{-3}\log^2 k+(c_{-3}-c_{-2})\log k+(c_{-3}+c_{-1})\Big]\Big\}-E\Big(0,\frac{h}{k}\Big),\qquad(91)$$

on obtient pour $1\leq T\ll\frac{x^{\frac{2}{3}}}{k}$:

$$\Delta\Big(x,\frac{h}{k}\Big)=\frac{1}{2i\pi}\int_{-\delta-iT}^{-\delta+iT}E\Big(s,\frac{h}{k}\Big)\frac{x^s}{s}ds+\mathcal{O}\Big(\frac{x^{1+2\delta}}{T}\Big).\qquad(92)$$

– On utilise maintenant l'expression de $E\big(s,\frac{h}{k}\big)$ fournie par le lemme 4:

$$E\Big(s,\frac{h}{k}\Big)=\frac{k}{2\pi^3}\Big(\frac{2\pi}{k}\Big)^{3s}\Gamma^3(1-s)\Big\{\Big(\sin\frac{s\pi}{2}\Big)^3\sum_{r=1}^{+\infty}\frac{1}{r^{1-s}}\Big[\sum_{lmn=r}(K_{-\overline{h},k}+K_{\overline{h},k})(l,m,n)\Big]$$
$$+i\Big(\cos\frac{s\pi}{2}\Big)^3\sum_{r=1}^{+\infty}\frac{1}{r^{1-s}}\Big[\sum_{lmn=r}(K_{-\overline{h},k}-K_{\overline{h},k})(l,m,n)\Big]\Big\},$$

ce qui donne, en remplaçant dans (92) et en intervertissant les sommations:

$$\Delta\Big(x,\frac{h}{k}\Big)=\frac{k}{2\pi^3}\sum_{r=1}^{+\infty}\frac{1}{r}\tilde{I}\Big(\frac{8\pi^3xr}{k^3}\Big)\Big[\sum_{lmn=r}(K_{-\overline{h},k}+K_{\overline{h},k})(l,m,n)\Big]$$
$$+\frac{ik}{2\pi^3}\sum_{r=1}^{+\infty}\frac{1}{r}\tilde{J}\Big(\frac{8\pi^3xr}{k^3}\Big)\Big[\sum_{lmn=r}(K_{-\overline{h},k}-K_{\overline{h},k})(l,m,n)\Big]+\mathcal{O}\Big(\frac{x^{1+2\delta}}{T}\Big),\qquad(93)$$

où on pose, pour $X>0$:

$$\tilde{I}(X):=\frac{1}{2i\pi}\int_{-\delta-iT}^{-\delta+iT}\Gamma^3(1-s)\Big(\sin\frac{s\pi}{2}\Big)^3\frac{X^s}{s}ds,$$
$$\tilde{J}(X):=\frac{1}{2i\pi}\int_{-\delta-iT}^{-\delta+iT}\Gamma^3(1-s)\Big(\cos\frac{s\pi}{2}\Big)^3\frac{X^s}{s}ds.$$

7. Estimation des termes d'erreur

a) Troncature de la série

– On commence par se restreindre à $r\leq N$ dans les séries de (93), N étant un entier que l'on déterminera dans la suite. Evaluons l'erreur ainsi commise $\mathcal{E}$. Compte-tenu de la majoration (64), on a:

$$\mathcal{E}\ll k^{\frac{3}{2}}\tau_3(k)\sum_{r=N+1}^{+\infty}\frac{\tau_3(r)(k,r)^{\frac{1}{2}}}{r}\Big\{\Big|\tilde{I}\Big(\frac{8\pi^3xr}{k^3}\Big)\Big|+\Big|\tilde{J}\Big(\frac{8\pi^3xr}{k^3}\Big)\Big|\Big\}.$$

On va étudier la contribution de $\tilde{I}$, celle de $\tilde{J}$ s'étudiant exactement de la même manière. On découpe $\tilde{I}(X)$ en trois intégrales $\tilde{I}_1(X)$, $\tilde{I}_2(X)$ et $\tilde{I}_3(X)$ correspondant respectivement à $t \in [-T,-1]$, $t \in [-1,1]$ et $t \in [1,T]$.

– On a d'abord

$$\tilde{I}_2(X) = \frac{1}{2i\pi}\int_{-\delta-i}^{-\delta+i} \Gamma^3(1-s)\Big(\sin\frac{s\pi}{2}\Big)^3 \frac{X^s}{s} ds \ll X^{-\delta}.$$

Donc les intégrales $\tilde{I}_2$ apportent une contribution:

$$\mathcal{E}_2 \ll k^{\frac{3}{2}}\tau_3(k)\sum_{r\geq N+1}\frac{\tau_3(r)(k,r)^{\frac{1}{2}}}{r}\frac{k^{3\delta}}{x^\delta r^\delta} \ll \frac{k^{\frac{3}{2}+3\delta}\tau_3(k)}{x^\delta}\sum_{r\geq N+1}\frac{\tau_3(r)(k,r)^{\frac{1}{2}}}{r^{1+\delta}},$$

ce qui donne, d'après le lemme 23:

$$\mathcal{E}_2 \ll \frac{k^{\frac{3}{2}+3\delta}\tau_3(k)\tau(k)}{N^\delta x^\delta}\log^2 N.$$

– Ensuite:

$$\tilde{I}_1(X) = \frac{1}{2i\pi}\int_{-\delta-iT}^{-\delta-i}\frac{\Gamma^3(1-s)}{s}\Big(\sin\frac{s\pi}{2}\Big)^3 X^s ds,$$

avec, d'après la formule (76):

$$\frac{\Gamma^3(1-s)}{s}\Big(\sin\frac{s\pi}{2}\Big)^3 X^s = A(-t)^{\frac{1}{2}+3\delta}X^{-\delta}e^{iF(-t)}\Big(1+\mathcal{O}\Big(\frac{1}{-t}\Big)\Big),$$

où A est une constante et:

$$F(t) := 3t\log t - 3t - t\log X.$$

Donc

$$\tilde{I}_1(X) = AX^{-\delta}\int_1^T t^{\frac{1}{2}+3\delta}e^{iF(t)}\Big(1+\mathcal{O}\Big(\frac{1}{t}\Big)\Big)dt = AX^{-\delta}\Big\{\int_1^T t^{\frac{1}{2}+3\delta}e^{iF(t)}dt + \mathcal{O}\Big(T^{\frac{1}{2}+3\delta}\Big)\Big\}.$$

– Pour estimer l'intégrale, on utilise la méthode de Van der Corput:

$$F'(t) = -\log\Big(\frac{X}{t^3}\Big).$$

On prend maintenant

$$T = \frac{2\pi}{k}\Big[x\Big(N+\frac{1}{2}\Big)\Big]^{\frac{1}{3}}$$

et on impose

$$1 \leq N \ll x,$$

de manière à avoir $T \ll \frac{x^{\frac{2}{3}}}{k}$.
Par ailleurs, on aura $T \geq 1$ à condition de supposer:

$$N \geq \frac{k^3}{8\pi^3 x}.$$

Le cas $1 \leq N \ll \frac{k^3}{x}$ sera étudié séparément.
Pour $X = \frac{8\pi^3 xr}{k^3}$, on a:

$$|F'(t)| \geq \log\frac{r}{N+\frac{1}{2}},$$

ce qui donne:

$$\tilde{I}_1(X) \ll X^{-\delta} T^{\frac{1}{2}+3\delta}\Big(1+\frac{1}{\log \frac{r}{N+\frac{1}{2}}}\Big).$$

On utilise cette majoration quand $r \geq N+k$. Pour $N+1 \leq r \leq N+k$, on utilise la majoration grossière:

$$\tilde{I}_1(X) \ll X^{-\delta} T^{\frac{3}{2}+3\delta},$$

d'où une contribution:

$$\mathcal{E}_1 = \mathcal{E}_1' + \mathcal{E}_1'',$$

avec:

$$\mathcal{E}_1' := \frac{k^{\frac{3}{2}+3\delta}\tau_3(k)T^{\frac{1}{2}+3\delta}}{x^\delta} \sum_{r\geq N+k} \frac{\tau_3(r)(k,r)^{\frac{1}{2}}}{r^{1+\delta}}\Big(1+\frac{1}{\log \frac{r}{N+\frac{1}{2}}}\Big)$$

et

$$\mathcal{E}_1'' := \frac{k^{\frac{3}{2}+3\delta}\tau_3(k)T^{\frac{3}{2}+3\delta}}{x^\delta} \sum_{N+1\leq r<N+k} \frac{\tau_3(r)(k,r)^{\frac{1}{2}}}{r^{1+\delta}}.$$

D'après le lemme 24, on a:

$$\sum_{r>N+k} \frac{\tau_3(r)(r,k)^{\frac{1}{2}}}{r^{1+\delta}}\Big(1+\frac{1}{\log \frac{r}{N+\frac{1}{2}}}\Big) \ll_\varepsilon N^{\varepsilon-\delta}\tau(k),$$

d'où:

$$\mathcal{E}_1' \ll_\varepsilon (Nx)^{\frac{1}{6}} k N^\varepsilon \tau_3(k)\tau(k).$$

Par ailleurs, on a:

$$\sum_{N+1\leq r<N+k} \frac{\tau_3(r)(k,r)^{\frac{1}{2}}}{r^{1+\delta}} \leq \sum_{d|k} \frac{\tau_3(d)}{d^{\frac{1}{2}+\delta}} \sum_{\frac{N+1}{d}\leq u\leq \frac{N+k}{d}} \frac{\tau_3(u)}{u^{1+\delta}} \ll_\varepsilon k N^{\varepsilon-1-\delta}\tau(k),$$

donc:

$$\mathcal{E}_1'' \ll_\varepsilon (Nx)^{\frac{1}{6}} k N^\varepsilon \tau_3(k)\tau(k)\frac{x^{\frac{1}{3}}}{N^{\frac{2}{3}}}.$$

On rassemble les deux majorations en tenant compte du fait que:

$$N \ll x \Rightarrow (Nx)^{\frac{1}{6}} k \ll k x^{\frac{2}{3}} N^{-\frac{1}{3}}$$

et

$$1 \ll (Nx)^{\frac{1}{6}} \Rightarrow (Nx)^{\frac{1}{6}} k \frac{x^{\frac{1}{3}}}{N^{\frac{2}{3}}} \ll k x^{\frac{2}{3}} N^{-\frac{1}{3}},$$

ce qui donne:

$$\mathcal{E}_1 \ll k x^{\frac{2}{3}} N^{-\frac{1}{3}}.$$

– $\mathcal{E}_3$ se traite exactement de la même façon. De plus:

$$x \gg N \gg \frac{k^3}{x} \Rightarrow \mathcal{E}_2 \ll \mathcal{E}_1.$$

Donc finalement:

$$\mathcal{E} \ll k x^{\frac{2}{3}} N^{-\frac{1}{3}}. \tag{94}$$

b) Transformation des intégrales

– D'après le paragraphe précédent, on a obtenu:

$$\Delta\Big(x,\frac{h}{k}\Big)=\frac{k}{2\pi^3}\sum_{r\le N}\frac{1}{r}\tilde{I}\Big(\frac{8\pi^3xr}{k^3}\Big)\Big[\sum_{lmn=r}\big(K_{-\overline{h},k}+K_{\overline{h},k}\big)(l,m,n)\Big]$$

$$+\frac{ik}{2\pi^3}\sum_{r\le N}\frac{1}{r}\tilde{J}\Big(\frac{8\pi^3xr}{k^3}\Big)\Big[\sum_{lmn=r}\big(K_{-\overline{h},k}-K_{\overline{h},k}\big)(l,m,n)\Big]+\mathcal{O}\big(kx^{\frac{2}{3}+2\delta}N^{-\frac{1}{3}}\big), \tag{95}$$

car:

$$N\ll x\Rightarrow kx^{\frac{2}{3}+2\delta}N^{-\frac{1}{3}}\gg kx^{\frac{1}{6}+\delta}N^{\frac{1}{6}}.$$

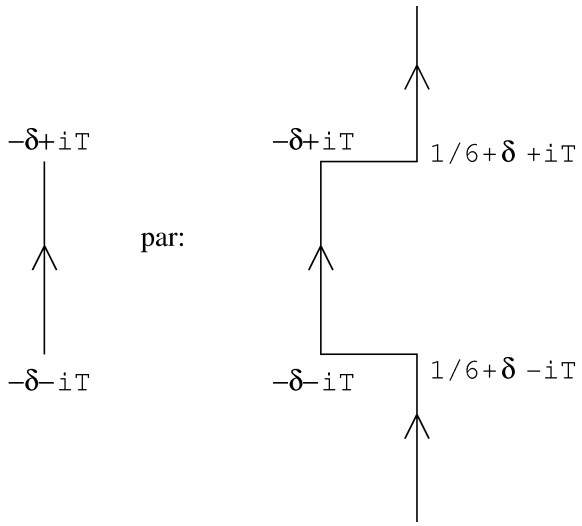
L'étape suivante consiste à remplacer $\tilde{I}$ par I et $\tilde{J}$ par $J-1$, où:

$$I(X):=\frac{1}{2i\pi}\int_{\frac{1}{6}+\delta-i\infty}^{\frac{1}{6}+\delta+i\infty}\frac{\Gamma^3(1-s)}{s}\Big(\sin\frac{s\pi}{2}\Big)^3X^sds$$

et

$$J(X):=\frac{1}{2i\pi}\int_{\frac{1}{6}+\delta-i\infty}^{\frac{1}{6}+\delta+i\infty}\frac{\Gamma^3(1-s)}{s}\Big(\cos\frac{s\pi}{2}\Big)^3X^sds.$$

Comme les intégrandes ont respectivement 0 et 1 comme résidu en $s=0$, cela revient à remplacer le chemin



– Evaluons d'abord l'erreur $\mathcal{F}$ sur les segments horizontaux. Compte-tenu de la majoration (64), on a pour le segment $[-\delta\pm iT,\frac{1}{6}+\delta\pm iT]$:

$$\mathcal{F}_\pm\ll k^{\frac{3}{2}}\tau_3(k)\sum_{r\le N}\frac{\tau_3(r)(k,r)^{\frac{1}{2}}}{r}\Big\{\Big|\int_{[-\delta\pm iT,\frac{1}{6}+\delta\pm iT]}\frac{\Gamma^3(1-s)}{s}\Big(\sin\frac{s\pi}{2}\Big)^3\Big(\frac{8\pi^3xr}{k^3}\Big)^sds\Big|$$

$$+\Big|\int_{-\delta\pm iT,\frac{1}{6}+\delta\pm iT]}\frac{\Gamma^3(1-s)}{s}\Big(\cos\frac{s\pi}{2}\Big)^3\Big(\frac{8\pi^3xr}{k^3}\Big)^sds\Big|\Big\}.$$

Or, d'après (72), (73), (76) et (77), les intégrandes sont

$$\ll T^{\frac{1}{2}-3\sigma}\Big(\frac{8\pi^3xr}{k^3}\Big)^\sigma.$$

Donc:

$$\mathcal{F} \ll k^{\frac{3}{2}}\tau_3(k)\sum_{r\leq N}\frac{\tau_3(r)(k,r)^{\frac{1}{2}}}{r}\int_{-\delta}^{\frac{1}{6}+\delta}T^{\frac{1}{2}-3\sigma}\Big(\frac{8\pi^3xr}{k^3}\Big)^{\sigma}d\sigma,$$

d'où, comme $T=\frac{2\pi}{k}\big[x\big(N+\frac{1}{2}\big)\big]^{\frac{1}{3}}$:

$$\mathcal{F} \ll k\big(xN\big)^{\frac{1}{6}}\tau_3(k)\sum_{r\leq N}\frac{\tau_3(r)(r,k)^{\frac{1}{2}}}{r}\int_{-\delta}^{\frac{1}{6}+\delta}\Big(\frac{r}{N+\frac{1}{2}}\Big)^{\sigma}d\sigma,$$

soit:

$$\mathcal{F} \ll kx^{\frac{1}{6}}N^{\frac{1}{6}+\delta}\tau_3(k)\sum_{r\leq N}\frac{\tau_3(k)(k,r)^{\frac{1}{2}}}{r^{1+\delta}}.$$

Par conséquent, d'après le lemme 22:

$$\mathcal{F} \ll kx^{\frac{1}{6}}N^{\frac{1}{6}+\delta}\tau(k)\tau_3(k).$$

– Reste à estimer l'erreur $\mathcal{G}$ sur les demi-droites verticales. A cause de (64), on a pour la demi-droite $\big[\frac{1}{6}+\delta\pm iT,\frac{1}{6}+\delta\pm i\infty\big[$:

$$\mathcal{G}_{\pm} \ll k^{\frac{3}{2}}\tau_3(k)\sum_{r\leq N}\frac{\tau_3(r)(k,r)^{\frac{1}{2}}}{r}\Big\{\Big|\int_{[\frac{1}{6}+\delta\pm iT,\frac{1}{6}+\delta\pm i\infty[}\frac{\Gamma^3(1-s)}{s}\Big(\sin\frac{s\pi}{2}\Big)^3\Big(\frac{8\pi^3xr}{k^3}\Big)^s ds\Big|$$

$$+\Big|\int_{[\frac{1}{6}+\delta\pm iT,\frac{1}{6}+\delta\pm i\infty[}\frac{\Gamma^3(1-s)}{s}\Big(\cos\frac{s\pi}{2}\Big)^3\Big(\frac{8\pi^3xr}{k^3}\Big)^s ds\Big|\Big\},$$

avec, d'après les formules (72), (73), (76) et (77), des intégrandes qui sont de la forme:

$$A|t|^{\frac{1}{2}-3s}\exp(3it)\Big(\frac{8\pi^3xr}{k^3}\Big)^s\Big(1+\mathcal{O}\Big(\frac{1}{|t|}\Big)\Big),$$

c'est-à-dire:

$$A\frac{x^{\frac{1}{6}+\delta}r^{\frac{1}{6}+\delta}}{k^{\frac{1}{2}+3\delta}}e^{iF_r(|t|)}\Big(1+\mathcal{O}\Big(\frac{1}{|t|}\Big)\Big),$$

où:

$$F_r(\omega):=\mp\Big[3\omega\log\omega-3\omega-\omega\log\Big(\frac{8\pi^3xr}{k^3}\Big)\Big].$$

Donc

$$\mathcal{G} \ll k^{1-3\delta}\tau_3(k)x^{\frac{1}{6}+\delta}\sum_{r\leq N}\frac{\tau_3(r)(k,r)^{\frac{1}{2}}}{r^{\frac{5}{6}-\delta}}\Big|\int_T^{+\infty}\frac{e^{iF_r(t)}}{t^{3\delta}}\Big(1+\mathcal{O}\Big(\frac{1}{t}\Big)\Big)dt\Big|.$$

On écrit alors:

$$\mathcal{G} \ll \mathcal{G}_1+\mathcal{G}_2+\mathcal{G}_3+\mathcal{G}_4,$$

avec:

$$\mathcal{G}_1:=k^{1-3\delta}\tau_3(k)x^{\frac{1}{6}+\delta}\sum_{r\leq\frac{N}{2}}\frac{\tau_3(r)(k,r)^{\frac{1}{2}}}{r^{\frac{5}{6}-\delta}}\Big|\int_T^{+\infty}\frac{e^{iF_r(t)}}{t^{3\delta}}\Big(1+\mathcal{O}\Big(\frac{1}{t}\Big)\Big)dt\Big|,$$

$$\mathcal{G}_2:=k^{1-3\delta}\tau_3(k)x^{\frac{1}{6}+\delta}\sum_{r\leq N}\frac{\tau_3(r)(k,r)^{\frac{1}{2}}}{r^{\frac{5}{6}-\delta}}\Big|\int_{2T}^{+\infty}\frac{e^{iF_r(t)}}{t^{3\delta}}\Big(1+\mathcal{O}\Big(\frac{1}{t}\Big)\Big)dt\Big|,$$

$$\mathcal{G}_3 := k^{1-3\delta}\tau_3(k)x^{\frac{1}{6}+\delta}\sum_{r\leq N-k}\frac{\tau_3(r)(k,r)^{\frac{1}{2}}}{r^{\frac{5}{6}-\delta}}\Big|\int_T^{2T}\frac{e^{iF_r(t)}}{t^{3\delta}}\Big(1+\mathcal{O}\Big(\frac{1}{t}\Big)\Big)dt\Big|,$$

$$\mathcal{G}_4 := k^{1-3\delta}\tau_3(k)x^{\frac{1}{6}+\delta}\sum_{\substack{N-k<r\leq N\\ r\geq\frac{N}{2}}}\frac{\tau_3(r)(k,r)^{\frac{1}{2}}}{r^{\frac{5}{6}-\delta}}\Big|\int_T^{2T}\frac{e^{iF_r(t)}}{t^{3\delta}}\Big(1+\mathcal{O}\Big(\frac{1}{t}\Big)\Big)dt\Big|.$$

– Dans $\mathcal{G}_1$ et $\mathcal{G}_2$, on a toujours:

$$|F_r'(t)|\geq\log\Big[\frac{N+\frac{1}{2}}{r}\Big(\frac{t}{T}\Big)^3\Big]\geq 2.$$

Donc, d'après la majoration de Van der Corput:

$$\mathcal{G}_1+\mathcal{G}_2\ll k^{1-3\delta}\tau_3(k)x^{\frac{1}{6}+\delta}T^{-3\delta}\sum_{r\leq N}\frac{\tau_3(r)(k,r)^{\frac{1}{2}}}{r^{\frac{5}{6}-\delta}},$$

ce qui donne, d'après le lemme 22:

$$\mathcal{G}_1+\mathcal{G}_2\ll k^{1-3\delta}\tau_3(k)x^{\frac{1}{6}+\delta}\Big(\frac{k}{(Nx)^{\frac{1}{3}}}\Big)^{3\delta}N^{\frac{1}{6}+\delta}\log^2 N\tau(k),$$

puis:

$$\mathcal{G}_1+\mathcal{G}_2\ll k\tau_3(k)\tau(k)x^{\frac{1}{6}}N^{\frac{1}{6}}\log^2 N.$$

– Dans $\mathcal{G}_3$, on a, d'après la majoration de Van der Corput:

$$\int_T^{2T}\frac{e^{iF_r(t)}}{t^{3\delta}}\Big(1+\mathcal{O}\Big(\frac{1}{t}\Big)\Big)dt\ll T^{-3\delta}\Big(1+\frac{1}{\log\frac{N+\frac{1}{2}}{r}}\Big),$$

d'où, d'après le lemme 25:

$$\mathcal{G}_3\ll_\varepsilon k\tau_3(k)\tau(k)x^{\frac{1}{6}}N^{\frac{1}{6}+\varepsilon}.$$

– Enfin, dans $\mathcal{G}_4$, on majore grossièrement l'intégrale par $T^{1-3\delta}$, ce qui donne:

$$\mathcal{G}_4\ll k\tau_3(k)x^{\frac{1}{6}}N^{-\delta}\Big(\sum_{\substack{N-k\leq r\leq N\\ r\geq\frac{N}{2}}}\frac{\tau_3(r)(k,r)^{\frac{1}{2}}}{r^{\frac{5}{6}-\delta}}\Big)\frac{(Nx)^{\frac{1}{3}}}{k}.$$

Or on a:

$$\sum_{\substack{N-k\leq r\leq N\\ r\geq\frac{N}{2}}}\frac{\tau_3(r)(k,r)^{\frac{1}{2}}}{r^{\frac{5}{6}-\delta}}=\sum_{d|k}\frac{\tau_3(d)}{d^{\frac{1}{3}-\delta}}\sum_{\substack{\frac{N-k}{d}\leq u\leq\frac{N}{d}\\ u\geq\frac{N}{2d}}}\frac{\tau_3(u)}{u^{\frac{5}{6}-\delta}}\ll_\varepsilon\Big(\sum_{d|k}\frac{\tau_3(d)}{\sqrt{d}}\Big)N^{\delta-\frac{5}{6}+\varepsilon}k,$$

d'où:

$$\mathcal{G}_4\ll_\varepsilon k\tau_3(k)\tau(k)x^{\frac{1}{6}}N^{\frac{1}{6}+\varepsilon}\frac{x^{\frac{1}{3}}}{N^{\frac{2}{3}}}.$$

– En rassemblant les résultats précédents, on obtient, comme pour $\mathcal{E}$:

$$\mathcal{G}\ll kx^{\frac{2}{3}+2\delta}N^{-\frac{1}{3}}. \tag{96}$$

– En rassemblant les majorations de $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$, on obtient:

$$\Delta\Big(x,\frac{h}{k}\Big)=\frac{k}{2\pi^3}\sum_{r\leq N}\frac{1}{r}I\Big(\frac{8\pi^3xr}{k^3}\Big)\Big[\sum_{lmn=r}\big(K_{-\overline{h},k}+K_{\overline{h},k}\big)(l,m,n)\Big]$$

$$+\frac{ik}{2\pi^3}\sum_{r\leq N}\frac{1}{r}\Big[J\Big(\frac{8\pi^3xr}{k^3}\Big)-1\Big]\Big[\sum_{lmn=r}\big(K_{-\overline{h},k}-K_{\overline{h},k}\big)(l,m,n)\Big]+\mathcal{O}\big(kx^{\frac{2}{3}+2\delta}N^{-\frac{1}{3}}\big). \tag{97}$$

8. Estimation du terme principal

a) Calcul de $I(X)$ et $J(X)$

Lemme 26. *Pour tout $X > 0$, on a:*

$$I(X) = \int_0^{+\infty} \Big(K_0(2\sqrt{u}) - \frac{\pi}{2} Y_0(2\sqrt{u})\Big) \sin \frac{X}{u} du. \tag{98}$$

$$J(X) = \int_0^{+\infty} \Big(K_0(2\sqrt{u}) + \frac{\pi}{2} Y_0(2\sqrt{u})\Big) \Big(1 - \cos \frac{X}{u}\Big) du. \tag{99}$$

PREUVE :

– Posons

$$I_c(X) := \frac{1}{2i\pi} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{\Gamma^3(1-s)}{s} X^s \Big(\sin \frac{s\pi}{2}\Big)^3 ds,$$

et supposons pour l'instant $\frac{3}{4} < c < 1$. En utilisant l'identité

$$\Big(\sin \frac{s\pi}{2}\Big)^3 = \frac{1}{2} \sin \frac{s\pi}{2} - \frac{1}{2} \Big(\sin \frac{s\pi}{2}\Big)(\cos \pi s)$$

et les lemmes 18, 19, on obtient:

$$I_c(X) = \frac{1}{2i\pi} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \int_0^{+\infty} \frac{\Gamma(1-s) \sin \frac{\pi s}{2}}{s} X^s \Big(K_0(2\sqrt{u}) - \frac{\pi}{2} Y_0(2\sqrt{u})\Big) u^{-s} ds du.$$

Or, d'après le lemme 16, on a:

$$K_0(2\sqrt{u}) = \frac{\sqrt{\pi}}{2} u^{-\frac{1}{4}} e^{-2\sqrt{u}} \big(1 + \mathcal{O}(u^{-\frac{1}{2}})\big). \tag{100}$$

$$Y_0(2\sqrt{u}) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} u^{-\frac{1}{4}} \sin\Big(2\sqrt{u} - \frac{\pi}{4}\Big) + \mathcal{O}\big(u^{-\frac{3}{4}}\big). \tag{101}$$

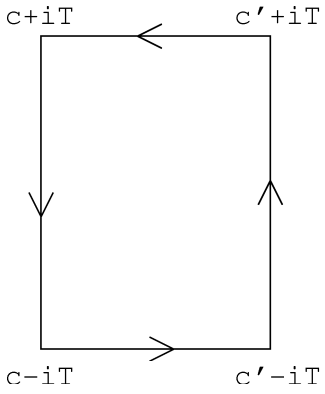
De plus, d'après (70) et (74):

$$\frac{\Gamma(1-s) \sin \frac{\pi s}{2}}{s} \ll |t|^{-\frac{1}{2}-c}.$$

Pour $\frac{3}{4} < c < 1$, l'intégrale double est donc absolument convergente, ce qui permet d'intervertir les intégrales. On obtient ainsi d'après le lemme 20:

$$I_c(X) = \int_0^{+\infty} \Big(K_0(2\sqrt{u}) - \frac{\pi}{2} Y_0(2\sqrt{u})\Big) \sin \frac{X}{u} du. \tag{102}$$

– On étend maintenant ce résultat à $c \in \big]\frac{1}{6}, 1\big[$.
Soit $c \in \big]\frac{1}{6}, \frac{3}{4}\big]$ et $c' \in \big]\frac{3}{4}, 1\big[$, et soir $\mathcal{R}_T$ le contour suivant:



On a, d'après le théorème des résidus:

$$\frac{1}{2i\pi}\int_{\mathcal{R}_T}\frac{\Gamma^3(1-s)}{s}\Big(\sin\frac{s\pi}{2}\Big)^3X^s ds=0.$$

Il suffit donc de montrer que:

$$\lim_{T\to+\infty}\int_{[c\pm iT,c'\pm iT]}\frac{\Gamma^3(1-s)}{s}\Big(\sin\frac{s\pi}{2}\Big)^3X^s ds=0$$

pour montrer que $I_c=I_c'$. Or, d'après (72) et (76), on a:

$$\frac{\Gamma^3(1-s)}{s}\Big(\sin\frac{s\pi}{2}\Big)^3\ll|t|^{\frac{1}{2}-3\sigma}.$$

Donc:

$$\int_{[c\pm iT,c'\pm iT]}\frac{\Gamma^3(1-s)}{s}\Big(\sin\frac{s\pi}{2}\Big)^3X^s ds\ll T^{\frac{1}{2}}\int_c^{c'}\Big(\frac{X}{T^3}\Big)^\sigma d\sigma$$

$$\ll T^{\frac{1}{2}}\Big[\Big(\frac{X}{T^3}\Big)^\sigma\frac{1}{\log X-3\log T}\Big]_c^{c'}\ll\frac{T^{\frac{1}{2}-3c}}{\log T}\ll\frac{1}{\log T},$$

car $c\geq\frac{1}{6}$. D'où le résultat.

– L'égalité (99) se démontre exactement de la même manière, en remplaçant le lemme 20 par le corollaire du lemme 21, et en utilisant l'identité:

$$\Big(\cos\frac{s\pi}{2}\Big)^3=\frac{1}{2}\cos\frac{s\pi}{2}+\frac{1}{2}\Big(\cos\frac{s\pi}{2}\Big)\cos\pi s.$$

b) Comportement asymptotique de $I(X)$ et $J(X)$

Lemme 27. *On a, quand X tend vers $+\infty$:*

$$I(X)=\frac{\pi\sqrt{3}}{6}X^{\frac{1}{3}}\cos\big(3X^{\frac{1}{3}}\big)+\mathcal{O}\big(X^{\frac{1}{6}}\big),\tag{103}$$

$$J(X)=-\frac{\pi\sqrt{3}}{6}X^{\frac{1}{3}}\sin\big(3X^{\frac{1}{3}}\big)+\mathcal{O}\big(X^{\frac{1}{6}}\big).\tag{104}$$

PREUVE :

– Il suffit de montrer que:

$$f_1(X):=\int_0^{+\infty}Y_0(2\sqrt{u})\big(1-e^{i\frac{X}{u}}\big)du=\frac{i\sqrt{3}}{3}X^{\frac{1}{3}}e^{3iX^{\frac{1}{3}}}+\mathcal{O}\big(X^{\frac{1}{6}}\big),$$

$$f_2(X):=\int_0^{+\infty}K_0(2\sqrt{u})\big(1-e^{i\frac{X}{u}}\big)du=\mathcal{O}\big(X^{\frac{1}{6}}\big).$$

– Commençons par étudier $f_1(X)$. Soit A et B deux réels tels que $0<A<1<B$. Posons $t:=X^{\frac{1}{3}}$ et effectuons le changement de variable $v=\frac{t^2}{u}$. On obtient:

$$f_1(X)=t^2\int_0^{+\infty}Y_0\Big(\frac{2t}{\sqrt{v}}\Big)\big(1-e^{itv}\big)\frac{dv}{v^2}.$$

– Soit

$$Z_1 := \int_0^A Y_0\Big(\frac{2t}{\sqrt{v}}\Big)\big(1-e^{itv}\big)\frac{dv}{v^2}.$$

D'après (81) pour $n=1$, on a:

$$Z_1 = \frac{-1}{2t^2}\int_0^A \Big[\frac{2t}{\sqrt{v}}Y_0\Big(\frac{2t}{\sqrt{v}}\Big)\Big(\frac{-t}{v^{\frac{3}{2}}}\Big)\Big](1-e^{itv})dv = -\frac{1}{2t^2}\int_0^A \frac{d}{dv}\Big[\frac{2t}{\sqrt{v}}Y_1\Big(\frac{2t}{\sqrt{v}}\Big)\Big](1-e^{itv})dv,$$

ce qui donne en intégrant par parties:

$$Z_1 = -\frac{1}{2t^2}\Big\{\Big[\frac{2t}{\sqrt{v}}Y_1\Big(\frac{2t}{\sqrt{v}}\Big)\big(1-e^{itv}\big)\Big]_0^A + \int_0^A \frac{2t}{\sqrt{v}}Y_1\Big(\frac{2t}{\sqrt{v}}\Big)ite^{itv}dv\Big\}$$

Or on a, d'après le lemme 16:

$$Y_1\Big(\frac{2t}{\sqrt{v}}\Big) = \frac{v^{\frac{1}{4}}}{\sqrt{\pi t}}\sin\Big(\frac{2t}{\sqrt{v}}-\frac{3\pi}{4}\Big)+\mathcal{O}\Big(\frac{v^{\frac{3}{4}}}{t^{\frac{3}{2}}}\Big). \tag{105}$$

Donc:

$$Z_1 = \frac{-i}{\sqrt{\pi t}}\int_0^A v^{-\frac{1}{4}}\sin\Big(\frac{2t}{\sqrt{v}}-\frac{3\pi}{4}\Big)e^{itv}dv+\mathcal{O}_A\Big(\frac{1}{t^{\frac{3}{2}}}\Big) = \frac{1}{2\sqrt{\pi t}}(Z_2^- - Z_2^+)+\mathcal{O}_A\Big(\frac{1}{t^{\frac{3}{2}}}\Big),$$

où:

$$Z_2^{\pm} := \int_0^A \frac{dv}{v^{\frac{1}{4}}}e^{i\left(tv\pm\left(\frac{2t}{\sqrt{v}}-\frac{3\pi}{4}\right)\right)} = -\frac{i}{t}\int_0^A \frac{v^{\frac{5}{4}}}{v^{\frac{3}{2}}\mp 1}\frac{d}{dv}\Big(e^{i\left(tv\pm\left(\frac{2t}{\sqrt{v}}-\frac{3\pi}{4}\right)\right)}\Big)dv,$$

ce qui donne en intégrant par parties:

$$Z_2^{\pm} = \pm\frac{i}{t}\Big\{\Big[\frac{v^{\frac{5}{4}}}{1\mp v^{\frac{3}{2}}}e^{i\left(tv\pm\left(\frac{2t}{\sqrt{v}}-\frac{3\pi}{4}\right)\right)}\Big]_0^A + \int_0^A \frac{5v^{\frac{1}{4}}\pm v^{\frac{7}{4}}}{4\big(1\mp v^{\frac{3}{2}}\big)^2}e^{i\left(tv\pm\left(\frac{2t}{\sqrt{v}}-\frac{3\pi}{4}\right)\right)}\Big)dv\Big\}.$$

Donc:

$$Z_2^{\pm} \ll \frac{1}{t},$$

puis

$$Z_1 \ll_A \frac{1}{t^{\frac{3}{2}}}. \tag{106}$$

– Soit

$$Z_3 := \int_B^{+\infty} Y_0\Big(\frac{2t}{\sqrt{v}}\Big)\big(1-e^{itv}\big)\frac{dv}{v^2}.$$

D'après le lemme 16, on a:

$$Y_0\Big(\frac{2t}{\sqrt{v}}\Big) = \frac{v^{\frac{1}{4}}}{\sqrt{\pi t}}\sin\Big(\frac{2t}{\sqrt{v}}-\frac{\pi}{4}\Big)+\mathcal{O}\Big(\frac{v^{\frac{3}{4}}}{t^{\frac{3}{2}}}\Big). \tag{107}$$

Donc

$$\begin{aligned} Z_3 &= \frac{1}{\sqrt{\pi t}}\int_B^{+\infty}\frac{dv}{v^{\frac{7}{4}}}\sin\Big(\frac{2t}{\sqrt{v}}-\frac{\pi}{4}\Big)\big(1-e^{itv}\big)+\mathcal{O}_B\Big(\frac{1}{t^{\frac{3}{2}}}\Big)\\ &= \frac{i}{2\sqrt{\pi t}}\big(Z_4^+ - Z_4^- - Z_5^+ + Z_5^-\big)+\mathcal{O}_B\Big(\frac{1}{t^{\frac{3}{2}}}\Big), \end{aligned}$$

où:

$$Z_4^{\pm} := \int_B^{+\infty}\frac{dv}{v^{\frac{7}{4}}}e^{i\left(tv\pm\left(\frac{2t}{\sqrt{v}}-\frac{\pi}{4}\right)\right)},$$

$$Z_5^{\pm} := \int_B^{+\infty} \frac{dv}{v^{\frac{7}{4}}} e^{\pm i\left(\frac{2t}{\sqrt{v}} - \frac{\pi}{4}\right)}.$$

On a:

$$Z_4^{\pm} = -\frac{i}{t} \int_B^{+\infty} \frac{dv}{v^{\frac{1}{4}}\left(v^{\frac{3}{2}} \mp 1\right)} \frac{d}{dv}\left(e^{i\left(tv \pm \left(\frac{2t}{\sqrt{v}} - \frac{\pi}{4}\right)\right)}\right),$$

ce qui donne en intégrant par parties:

$$Z_4^{\pm} = -\frac{i}{t}\Big\{\Big[\frac{1}{v^{\frac{1}{4}}\left(v^{\frac{3}{2}} \mp 1\right)} e^{i\left(tv \pm \left(\frac{2t}{\sqrt{v}} - \frac{\pi}{4}\right)\right)}\Big]_B^{+\infty} + \frac{1}{4}\int_B^{+\infty} \frac{7v^{\frac{3}{2}} \mp 1}{v^{\frac{5}{4}}\left(v^{\frac{3}{2}} \mp 1\right)^2} e^{i\left(tv \pm \left(\frac{2t}{\sqrt{v}} - \frac{\pi}{4}\right)\right)} dv\Big\}.$$

Donc

$$Z_4^{\pm} \ll \frac{1}{t}.$$

Par ailleurs:

$$Z_5^{\pm} = \pm\frac{i}{t} \int_B^{+\infty} \frac{dv}{v^{\frac{1}{4}}} \frac{d}{dv}\left(e^{\pm i\left(\frac{2t}{\sqrt{v}} - \frac{\pi}{4}\right)}\right),$$

ce qui, en intégrant à nouveau par parties, donne:

$$Z_5^{\pm} = \pm\frac{i}{t}\Big\{\Big[\frac{1}{v^{\frac{1}{4}}} e^{\pm i\left(\frac{2t}{\sqrt{v}} - \frac{\pi}{4}\right)}\Big]_B^{+\infty} + \frac{1}{4}\int_B^{+\infty} \frac{dv}{v^{\frac{5}{4}}} e^{\pm i\left(\frac{2t}{\sqrt{v}} - \frac{\pi}{4}\right)}\Big\},$$

d'où

$$Z_5^{\pm} \ll \frac{1}{t}$$

puis:

$$Z_3 \ll_B \frac{1}{t^{\frac{3}{2}}}. \tag{108}$$

– Soit

$$Z_6 := \int_A^B Y_0\Big(\frac{2t}{\sqrt{v}}\Big)\left(1 - e^{itv}\right)\frac{dv}{v^2}.$$

D'après (107), on peut écrire:

$$\begin{aligned} Z_6 &= \frac{1}{\sqrt{\pi t}} \int_A^B \frac{dv}{v^{\frac{7}{4}}} \sin\Big(\frac{2t}{\sqrt{v}} - \frac{\pi}{4}\Big)\left(1 - e^{itv}\right) + \mathcal{O}_{A,B}\Big(\frac{1}{t^{\frac{3}{2}}}\Big) \\ &= \frac{i}{2\sqrt{\pi t}}\left(Z_7^+ - Z_7^- - Z_8^+ + Z_8^-\right) + \mathcal{O}_{A,B}\Big(\frac{1}{t^{\frac{3}{2}}}\Big), \end{aligned}$$

avec:

$$Z_7^{\pm} := \int_A^B \frac{dv}{v^{\frac{7}{4}}} e^{i\left(tv \pm \left(\frac{2t}{\sqrt{v}} - \frac{\pi}{4}\right)\right)},$$

$$Z_8^{\pm} := \int_A^B \frac{dv}{v^{\frac{7}{4}}} e^{\pm i\left(\frac{2t}{\sqrt{v}} - \frac{\pi}{4}\right)}.$$

Pour Z_7^-, le même calcul que pour Z_4^- donne:

$$Z_7^- = -\frac{i}{t}\Big\{\Big[\frac{1}{v^{\frac{1}{4}}\left(v^{\frac{3}{2}} + 1\right)} e^{i\left(tv - \left(\frac{2t}{\sqrt{v}} - \frac{\pi}{4}\right)\right)}\Big]_A^B + \frac{1}{4}\int_A^B \frac{7v^{\frac{3}{2}} + 1}{v^{\frac{5}{4}}\left(v^{\frac{3}{2}} + 1\right)} e^{i\left(tv - \left(\frac{2t}{\sqrt{v}} - \frac{\pi}{4}\right)\right)} dv\Big\},$$

d'où:

$$Z_7^- \ll \frac{1}{t}.$$

Pour $Z_8^{\pm}$, le même calcul que pour $Z_5^{\pm}$ donne:

$$Z_8^{\pm} = \pm\frac{i}{t}\Big\{\Big[\frac{1}{v^{\frac{1}{4}}} e^{\pm i\left(\frac{2t}{\sqrt{v}} - \frac{\pi}{4}\right)}\Big]_A^B + \frac{1}{4}\int_A^B \frac{dv}{v^{\frac{5}{4}}} e^{\pm i\left(\frac{2t}{\sqrt{v}} - \frac{\pi}{4}\right)}\Big\},$$

d'où:

$$Z_8^{\pm} \ll \frac{1}{t}.$$

– Pour évaluer Z_7^+, on utilise la méthode de la phase stationnaire, sous la forme suivante (cf [8] ou [5]).

Théorème E. *Soit g et h deux fonctions réelles indéfiniment dérivables sur $[A,B]$. On suppose que h' ne s'annule qu'en un point C tel que $A < C < B$, et que l'on a $g(C) \neq 0$, $h''(C) \neq 0$. Alors, quand t tend vers $+\infty$:*

$$\int_A^B g(v)e^{ith(v)}dv = \begin{cases} \left(\frac{\pi}{2th''(C)}\right)^{\frac{1}{2}} g(C)e^{ith(C)+\frac{i\pi}{4}} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{t}\right) & \text{si } h''(C) > 0 \\ \left(\frac{\pi}{-2th''(C)}\right)^{\frac{1}{2}} g(C)e^{ith(C)-\frac{i\pi}{4}} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{t}\right) & \text{si } h''(C) < 0. \end{cases}$$

On prend ici $g(v) = \frac{1}{v^{\frac{7}{4}}}$ et $h(v) = \frac{2}{\sqrt{v}} + v$, si bien que $h'(v) = 1 - \frac{1}{v^{\frac{3}{2}}}$ ne s'annule qu'au point $C = 1 \in]A,B[$. De plus $g(1) = 1$, $h''(1) = \frac{3}{2} > 0$ et $h(1) = 3$, donc:

$$\int_A^B \frac{dv}{v^{\frac{7}{4}}} e^{i\left(tv+\frac{2t}{\sqrt{v}}\right)} = 2\left(\frac{\pi}{3t}\right)^{\frac{1}{2}} e^{3it+\frac{i\pi}{4}} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{t}\right),$$

puis

$$Z_7^+ = 2\left(\frac{\pi}{3t}\right)^{\frac{1}{2}} e^{3it} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{t}\right).$$

Donc

$$Z_6 = \frac{i\sqrt{3}}{3t} e^{3it} + \mathcal{O}_{A,B}\left(\frac{1}{t^{\frac{3}{2}}}\right). \tag{109}$$

En rassemblant (106), (108) et (109), on obtient:

$$f_1(X) = \frac{i\sqrt{3}}{3} X^{\frac{1}{3}} e^{3iX^{\frac{1}{3}}} + \mathcal{O}\left(X^{\frac{1}{6}}\right),$$

ce qui est le résultat voulu.

– Reste à majorer:

$$f_2(X) = \int_0^{+\infty} K_0(2\sqrt{u})\left(1 - e^{i\frac{x}{u}}\right) = t^2 \int_0^{+\infty} K_0\left(\frac{2t}{\sqrt{v}}\right)\left(1 - e^{itv}\right)\frac{dv}{v^2}.$$

D'après le lemme 16, on a:

$$K_0\left(\frac{2t}{\sqrt{v}}\right) = \frac{v^{\frac{1}{4}}}{2}\sqrt{\frac{\pi}{t}} e^{-\frac{2t}{\sqrt{v}}}\left(1 + \mathcal{O}\left(\frac{\sqrt{v}}{t}\right)\right).$$

Donc:

$$\int_0^{4t^2} K_0\left(\frac{2t}{\sqrt{v}}\right)\left(1 - e^{itv}\right)\frac{dv}{v^2} \ll \frac{1}{\sqrt{t}} \int_0^{4t^2} \frac{dv}{v^{\frac{7}{4}}} e^{-\frac{2t}{\sqrt{v}}} \ll \frac{1}{t^{\frac{3}{2}}} \int_0^{4t^2} \frac{d}{dv}\left(e^{-\frac{2t}{\sqrt{v}}}\right)\frac{dv}{v^{\frac{1}{4}}},$$

d'où, en intégrant par parties:

$$\int_0^{4t^2} K_0\left(\frac{2t}{\sqrt{v}}\right)\left(1 - e^{itv}\right)\frac{dv}{v^2} \ll \frac{1}{t^{\frac{3}{2}}}\left\{\left[\frac{e^{-\frac{2t}{\sqrt{v}}}}{v^{\frac{1}{4}}}\right]_0^{4t^2} + \frac{1}{4}\int_0^{4t^2} \frac{dv}{v^{\frac{5}{4}}} e^{-\frac{2t}{\sqrt{v}}}\right\} \ll \frac{1}{t^{\frac{3}{2}}}.$$

De plus:

$$\int_{4t^2}^{+\infty} K_0\left(\frac{2t}{\sqrt{v}}\right)\left(1 - e^{itv}\right)\frac{dv}{v^2} \ll \int_{4t^2}^{+\infty} \frac{dv}{v^2} \ll \frac{1}{t^2},$$

d'où finalement

$$f_2(X) = \mathcal{O}\left(X^{\frac{1}{6}}\right),$$

ce qui termine la démonstration.

9. La formule de Voronoï tronquée

– On peut maintenant reporter les estimations du lemme 27 dans la formule (97). Pour $1 \leq N \ll x$ et $N \geq \frac{k^3}{8\pi^3 x}$, on a:

$$\Delta\Big(x,\frac{h}{k}\Big) = \frac{k}{2\pi^3}\sum_{r\leq N}\frac{1}{r}\Big[\frac{\pi\sqrt{3}}{6}\frac{2\pi x^{\frac{1}{3}}r^{\frac{1}{3}}}{k}\cos\Big(\frac{6\pi(rx)^{\frac{1}{3}}}{k}\Big)+\mathcal{O}\Big(\frac{(rx)^{\frac{1}{6}}}{k^{\frac{1}{2}}}\Big)\Big]\Big[\sum_{lmn=r}\big(K_{-\overline{h},k}+K_{\overline{h},k}\big)(l,m,n)\Big]$$

$$-\frac{ik}{2\pi^3}\sum_{r\leq N}\frac{1}{r}\Big[\frac{\pi\sqrt{3}}{6}\frac{2\pi x^{\frac{1}{3}}r^{\frac{1}{3}}}{k}\sin\Big(\frac{6\pi(rx)^{\frac{1}{3}}}{k}\Big)-1+\mathcal{O}\Big(\frac{(rx)^{\frac{1}{6}}}{k^{\frac{1}{2}}}\Big)\Big]\Big[\sum_{lmn=r}\big(K_{-\overline{h},k}-K_{\overline{h},k}\big)(l,m,n)\Big]$$

$$+\mathcal{O}\big(kx^{\frac{2}{3}+2\delta}N^{-\frac{1}{3}}\big).$$

Donc, d'après la majoration (64):

$$\Delta\Big(x,\frac{h}{k}\Big) = \frac{x^{\frac{1}{3}}\sqrt{3}}{6\pi}\sum_{r\leq N}\frac{1}{r^{\frac{2}{3}}}\cos\Big(\frac{6\pi(rx)^{\frac{1}{3}}}{k}\Big)\Big[\sum_{lmn=r}\big(K_{\overline{h},k}+K_{-\overline{h},k}\big)(l,m,n)\Big]$$

$$+\frac{ix^{\frac{1}{3}}\sqrt{3}}{6\pi}\sum_{r\leq N}\frac{1}{r^{\frac{2}{3}}}\sin\Big(\frac{6\pi(rx)^{\frac{1}{3}}}{k}\Big)\Big[\sum_{lmn=r}\big(K_{\overline{h},k}-K_{-\overline{h},k}\big)(l,m,n)\Big]$$

$$+\mathcal{O}\big(kx^{\frac{2}{3}+2\delta}N^{-\frac{1}{3}}\big)+\mathcal{O}\Big(k^{\frac{3}{2}}\tau_3(k)\sum_{r\leq N}\frac{(k,r)^{\frac{1}{2}}\tau_3(r)}{r}\Big(1+\frac{(rx)^{\frac{1}{6}}}{k^{\frac{1}{2}}}\Big)\Big).$$

– Le dernier terme d'erreur vaut:

$$\mathcal{H} = k^{\frac{3}{2}}\tau_3(k)\sum_{r\leq N}\frac{(k,r)^{\frac{1}{2}}\tau_3(r)}{r}+x^{\frac{1}{6}}k\tau_3(k)\sum_{r\leq N}\frac{(k,r)^{\frac{1}{2}}\tau_3(r)}{r^{\frac{5}{6}}},$$

soit, d'après le lemme 22:

$$\mathcal{H} \ll k\tau_3(k)\tau(k)\big(k^{\frac{1}{2}}\log^3 N+(Nx)^{\frac{1}{6}}\log^2 N\big) \ll k\tau_3(k)\tau(k)(Nx)^{\frac{1}{6}}\log^3 N\Big(1+\frac{1}{T^{\frac{1}{2}}}\Big),$$

et, comme on suppose $\frac{k^3}{8\pi^3 x} \leq N \ll x$:

$$\mathcal{H} \ll kx^{\frac{2}{3}+2\delta}N^{-\frac{1}{3}}.$$

– Le théorème 1 est donc démontré dans le cas $\frac{k^3}{8\pi^3 x} \leq N \ll x$, à condition de poser

$$\begin{cases} c_2(k) := \frac{1}{2}c_{-3}, \\ c_1(k) := -c_{-3}\log k+(c_{-2}-c_{-3}), \\ c_0(k) := \frac{1}{2}c_{-3}\log^2 k+(c_{-3}-c_{-2})\log k+(c_{-3}+c_{-1}). \end{cases}$$

On vérifie facilement, à partir de leurs expressions explicites, que c_{-1}, c_{-2} et c_{-3} sont majorés par k^{ε} pour tout $\varepsilon > 0$. Donc on a, pour $i = 0,1,2$:

$$c_i(k) \ll_{\varepsilon} k^{\varepsilon}.$$

– Reste le cas $N \ll \frac{k^3}{x}$. On a par définition:

$$\Delta\Big(x,\frac{h}{k}\Big) = D\Big(x,\frac{h}{k}\Big)-\frac{x}{k}\big[c_2(k)\log^2 x+c_1(k)\log x+c_0(k)\big]-E\Big(0,\frac{h}{k}\Big),$$

avec:

$$\begin{cases} D\big(x,\frac{h}{k}\big) = \sum\limits_{n\leq x} \tau_3(n) e\big(\frac{nh}{k}\big) \ll x\log^2 x, \\ \forall i \in \{0,1,2\},\ c_i(k) \ll_\varepsilon k^\varepsilon, \\ E\big(0,\frac{h}{k}\big) \ll k^{\frac{3}{2}} \tau_3(k)\tau(k)\log^3 k. \end{cases}$$

Donc, si on suppose en outre $k \ll x^{\frac{2}{3}}$, on obtient:

$$\Delta\Big(x,\frac{h}{k}\Big) \ll x\log^2 x + k^{\frac{3}{2}}\tau_3(k)\tau(k)\log^3 k \ll x^{1+2\delta}.$$

Le terme principal dans (38) est, d'après le lemme 22:

$$\ll \tau_3(k) k^{\frac{1}{2}} x^{\frac{1}{3}} \sum_{r\leq N} \frac{(k,r)^{\frac{1}{2}}\tau_3(r)}{r^{\frac{2}{3}}} \ll (Nx)^{\frac{1}{3}} k^{\frac{1}{2}} \tau_3(k)\tau(k)\log^2 N \ll x^{1+2\delta}.$$

Enfin, comme $N \ll \frac{k^3}{x}$, on a:

$$kx^{\frac{2}{3}+2\delta} N^{-\frac{1}{3}} \gg x^{1+2\delta},$$

ce qui achève la démonstration du théorème.

– Pour prouver le corollaire 1, on choisit $N = x^{\frac{1}{2}} k^{\frac{3}{4}}$ (qui est $\ll x$ car on suppose $k \ll x^{\frac{2}{3}}$) dans le théorème 1. Le terme principal dans (38) est:

$$\ll (Nx)^{\frac{1}{3}} k^{\frac{1}{2}} \tau_3(k)\tau(k)\log^2 N \ll_\varepsilon x^{\frac{1}{2}+\varepsilon} k^{\frac{3}{4}},$$

et le terme d'erreur est:

$$\ll_\varepsilon kx^{\frac{2}{3}+2\delta} N^{-\frac{1}{3}} \ll_\varepsilon x^{\frac{1}{2}+\varepsilon} k^{\frac{3}{4}},$$

ce qui donne le résultat.

– Notons enfin que le résultat donné dans le corollaire 1 peut être amélioré de manière significative, comme me l'a indiqué G. Tenenbaum ([24]). On peut en effet obtenir un terme reste meilleur:

$$\mathcal{O}\big((\|\S)^{\frac{\infty}{\epsilon}+\varepsilon}\big)$$

uniformément pour $k \leq x$, en utilisant la majoration suivante (voir [22]):

Théorème F. (Montgomery) *Si $T \geq 2$ et $k \geq 1$, alors:*

$$\sum_{\chi \bmod k}{}^{*} \int_{-T}^{T} |L(\sigma+it,\chi)|^4 dt \ll \varphi(k) T (\log kT)^4,$$

à condition d'avoir $\frac{1}{2} - (\log kT)^{-1} \leq \sigma \leq \frac{1}{2} + (\log kT)^{-1}$.

Ce résultat profond repose sur une équation fonctionnelle «avec poids», vérifiée par les fonctions L.

Pour ce ramener à ce théorème, on prend p_0 assez grand, et on considère la fonction multiplicative f telle que, pour tout $\nu \geq 1$, on ait

$$f(p^\nu) = \begin{cases} 0 & \text{si } p \leq p_0 \\ 3^\nu & \text{si } p > p_0 \end{cases}$$

si bien que pour $p_0 \geq 3^{\frac{1}{\varepsilon}}$, on a $f(n) \leq n^\varepsilon$. Par ailleurs, si on écrit $\tau_3 = f * h$, on a:

$$\sum_{m=1}^{+\infty} \frac{|h(m)|}{m^{\frac{1}{2}+\varepsilon}} < +\infty.$$

Par conséquent, il suffit de montrer que le terme d'erreur de

$$\sum_{n\leq x} f(n)e\Big(n\frac{h}{k}\Big)$$

est $\mathcal{O}\big((\|\S)^{\frac{\infty}{\epsilon}+\varepsilon}\big)$ uniformément pour $k\leq x$.
Comme f est complètement multiplicative, on peut écrire:

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{f(n)e\big(\frac{nh}{k}\big)}{n^s}=\sum_{d|k}\frac{f(d)}{d^s}\sum_{\chi \bmod \frac{k}{d}} G\Big(\chi,\frac{k}{d}\Big)\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{f(n)\chi(n)}{n^s},$$

avec, d'après la majoration classique des sommes de Gauss:

$$|G(\chi,m)|\leq\frac{\sqrt{m}}{\varphi(m)}.$$

La formule de Perron donne alors:

$$\sum_{n\leq x} f(n)e\Big(\frac{nh}{k}\Big)=\frac{1}{2i\pi}\int_{1+\varepsilon-iT}^{1+\varepsilon+iT}\Big(\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{f(n)e(\frac{nh}{k})}{n^s}\Big)\frac{x^s}{s}ds+\mathcal{O}\Big(\frac{x^{1+2\varepsilon}}{T}\Big).$$

Or la série de Dirichlet mise en jeu peut s'écrire en fonction de:

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{f(n)\chi(n)}{n^s}=L(s,\chi)^3H(s,\chi),$$

où $H(s,\chi)$ est absolument convergente pour $\sigma\geq\frac{1}{2}+\varepsilon$, ce qui donne un terme d'erreur:

$$\ll x^\sigma\sum_{d|k}\frac{\tau_3(d)\sqrt{k}}{k^{\sigma+\frac{1}{2}}\varphi(\frac{k}{d})}\int_{-T}^{T}\sum_{\chi \bmod \frac{k}{d}}|L(s,\chi)|^3|H(s,\chi)|\frac{d\tau}{1+|\tau|}.$$

Quand σ tend vers $\frac{1}{2}$, on a:

$$|H(s,\chi)|\ll\frac{1}{2\sigma-1}.$$

Par conséquent:

$$\Big|H\Big(\frac{1}{2}+\frac{1}{\log kT},\chi\Big)\Big|\ll\log kT.$$

Enfin, on utilise le théorème de Montgomery, d'où le résultat annoncé, grâce à la formule de Hölder et à une intégration par parties.

– Nous verrons néanmoins dans le chapitre suivant que pour de «petites valeurs» de k, on peut encore améliorer ce résultat.

Références

[1] F.V. Atkinson, *A divisor problem*, Quarterly Journal of Mathematics, **12** (1941), 193-200.

[2] B. Berndt, *The Voronoï summation formula*, in "The Theory of arithmetic Functions", Conference Western Michigan University 1971, Springer-Verlag (1972).

[3] K. Chandrasekharan & R. Narasimhan, *The approximate functional equation for a class of zeta functions*, Math. Annalen, **152** (1963), 30-64.

[4] M.M. Crum, *On some Dirichlet series*, Journal of the London Mathematical Society, **15** (1940), 10-15.

[5] J. Dieudonné, *Calcul infinitésimal*, Hermann, Paris (1980).

[6] A.L. Dixon & W.L. Ferrar, *On the summation formulae of Voronoï and Poisson*, Quarterly Journal of Mathematics, **8** (1937), 66-74

[7] A.L. Dixon & W.L. Ferrar, *Some summations over the lattice points of a circle (I)*, Quarterly Journal of Mathematics, **5** (1934), 48-63.

[8] A. Erdélyi, *Asymptotic Expansions*, Doner Publications, Inc., New-York (1956).

[9] T. Estermann, *On Kloosterman's sum*, Mathematika, **8** (1961), 83-86.

[10] G.H. Hardy & E.M. Wright, *An Introduction to the Theory of Numbers*, Oxford (1979).

[11] D.R. Heath-Brown, *The twelfth power moment of the Riemann Zeta-function*, Quarterly Journal of Mathematics, **29** (1978), 443-462.

[12] A. Ivič, *The Riemann Zeta-function*, John Wiley, New-York, Chichester, Brisbane, Toronto, Singapore (1985).

[13] H. Iwaniec, *Fourier coefficients of cusp forms and the Riemann Zeta-function*, Exposé No. 18, Séminaire de Théorie des Nombres, Université de Bordeaux (1979-1980).

[14] M. Jutila, *Lectures on a Method in the Theory of exponential Sums*, Tata Institute of fundamental Research, Bombay (1987).

[15] M. Jutila, *The fourth power-moment of the Riemann zeta-function over a short interval*, in "Coll. Math. Soc. János Bolyai **51**. Number Theory", Budapest (1987).

[16] M. Jutila, *Mean value estimates for exponential sums*, in "Number Theory, Ulm 1987", Lecture Notes in Mathematics 1380, Springer-Verlag (1989), 120-136.

[17] M. Jutila, *Mean value estimates for exponential sums II*, Arch. Math., **55** (1990), 267-274.

[18] M. Jutila, *Exponential sums connected with quadratic forms*, in "Number Theory, Proc. of the first Conference of the canadian Number Theory Association, Banff 1988", Walter de Gruyter, Berlin, New-York (1990), 271-286.

[19] M. Jutila, *Mean value estimates for exponential sums with applications to L-functions*, Acta arithmetica.

[20] E. Landau, *Über die Anzahl der Gitterpunkte in gewissen Bereichen*, Göttinger Nachrichten (1912), 687-771.

[21] E. Landau, *Vorlesungen über Zahlentheorie*, zweiter Band, Chelsea, New-York (1947).

[22] H.L. Montgomery, *Topics in multiplicative number theory*, Springer-Verlag, Berlin (1971).

[23] H. Salié, *Über die Kloostermanschen Summen $S(u,v;q)$*, Math. Zeit., **34** (1931), 91-109.

[24] G. Tenenbaum, Lettre à H. Daboussi.

[25] E.C. Titchmarsh, *Introduction to the Theory of Fourier Integrals*, Oxford University Press, Oxford (1948).

[26] E.C. Titchmarsh, *The theory of the Riemann Zeta-function*, Oxford University Press, Oxford (1951).

[27] G. Voronoï, *Sur une fonction transcendante et ses applications à la sommation de quelques séries*, Annales de l'Ecole Normale, (3) **21** (1904), 207-268 et 459-534.

[28] G. Voronoï, *Sur le développement, à l'aide des fonctions cylindriques, des sommes doubles* $\sum f(pm^2 + 2qmn + rn^2)$ *où* $pm^2 + 2qmn + rn^2$ *est une forme positive à coefficients entiers*, Verhandlungen des dritten Internat. Math. Kong. in Heidelberg, B.G. Teubner, Leipzig (1905), 241-245.

[29] G.N. Watson, *A Treatise on the Theory of Bessel Functions*, Cambridge University Press, Cambridge (1944).

[30] A. Weil, *On some exponential sums*, Proc. Nat. Acad. Sci. USA, **34** (1948), 204-207.

[31] J.R. Wilton, *Voronoï's summation formula*, Quarterly Journal of Mathematics, **3** (1932), 26-32.

Chapitre 4

Formule de Voronoï pour τ_3 - Applications

– L'objet de ce chapitre est d'établir une formule de Voronoï pour la somme d'exponentielles suivante:

$$D\Big(x,\frac{h}{k}\Big) := \sum_{n\leq x}{}' \tau_3(n) e\Big(\frac{nh}{k}\Big),$$

où $\tau_3(n)$ est le nombre de manières d'écrire n comme produit de trois entiers naturels non nuls, et h, k sont deux entiers premiers entre eux.

– On s'intéressera ensuite, à titre d'application, au comportement asymptotique de la somme:

$$D(x;l,k) := \sum_{\substack{n\leq x\\ n\equiv l \bmod k}}{}' \tau_3(n),$$

qui est liée au comportement de τ_3 dans les progressions arithmétiques. On retrouvera ainsi un résultat dû à Selberg, et redémontré d'une autre manière par Smith.

– Ce travail s'inspire largement de la méthode mise au point par Jutila, que l'on peut trouver exposée dans [8].

– Pour étudier la somme $D\big(x,\frac{h}{k}\big)$, on aura recours à la somme auxiliaire:

$$D_a\Big(x,\frac{h}{k}\Big) := \frac{1}{\Gamma(a+1)} \sum_{n\leq x}{}' \tau_3(n) e\Big(\frac{nh}{k}\Big)(x-n)^a,$$

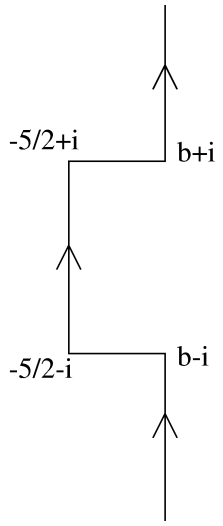
définie ici pour $x \geq 1$ et $a \geq 0$.
On commencera par obtenir une formule de Voronoï pour cette somme dans le cas où a est supérieur à $\frac{3}{2}$, puis on en déduira le résultat correspondant lorsque a est un réel strictement positif quelconque.

1. Le cas où $a = 2 + \varepsilon$ $(\varepsilon > 0)$

– Pour $c = 1 + \delta$ (où $\delta > 0$), on a, d'après une généralisation de la formule de Perron (cf par exemple [4]):

$$D_a\Big(x,\frac{h}{k}\Big) = \frac{1}{2i\pi} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{\Gamma(s)x^{s+a}}{\Gamma(s+a+1)} E\Big(s,\frac{h}{k}\Big) ds. \tag{110}$$

On suppose d'abord $a = 2 + \varepsilon$ et on veut déplacer le contour vers le contour $\mathcal{C}_b$ suivant:



où b sera déterminé ultérieurement.
En utilisant l'équation fonctionnelle (45) et le principe de Phragmen-Lindelöf, on obtient, pour σ borné et $|t| \geq 1$:

$$E\Big(s, \frac{h}{k}\Big) \ll_{k,\delta} \begin{cases} |t|^{\frac{3}{2}(1-2\sigma)} & \text{si } \sigma \leq -\delta \\ |t|^{\frac{3}{2}(1+\delta-\sigma)} & \text{si } -\delta \leq \sigma \leq 1+\delta \end{cases} \tag{111}$$

On en déduit:

$$\frac{\Gamma(s)x^{s+a}}{\Gamma(s+a+1)} E\Big(s, \frac{h}{k}\Big) \ll \begin{cases} |t|^{\frac{1}{2}-3\sigma-a} & \text{si } \sigma \leq -\delta \\ |t|^{\frac{1}{2}-\frac{3}{2}(\sigma-\delta)-a} & \text{si } -\delta \leq \sigma \leq 1+\delta \end{cases}$$

Par conséquent, les intégrales suivantes:

$$\frac{1}{2i\pi} \int_{[b\pm iT, c\pm iT]} E\Big(s, \frac{h}{k}\Big) \frac{x^{s+a}\Gamma(s)}{\Gamma(s+a+1)} ds \ll \Big[\frac{T^{\frac{1}{2}-3\sigma-a}}{-3\log T}\Big]_b^{-\delta} + \Big[\frac{T^{\frac{1}{2}-\frac{3}{2}(\sigma-\delta)-a}}{-\frac{3}{2}\log T}\Big]_{-\delta}^{1+\delta}$$

tendent vers 0 quand T tend vers $+\infty$, à condition de supposer $b \geq \frac{1}{6} - \frac{a}{3}$.

– On a besoin également des résidus en 1, 0, -1 et -2.

En $s = 1$, on utilise les développements en série de Laurent suivants (cf le lemme 10 du chapitre 3):

$$E\Big(s, \frac{h}{k}\Big) = \frac{c_{-3}(k)}{k(s-1)^3} + \frac{c_{-2}(k) - c_{-3}(k)\log k}{k(s-1)^2} + \frac{c_{-1}(k) - c_{-3}(k)\log k + \frac{1}{2}c_{-3}(k)\log^2 k}{k(s-1)} + \dots$$

$$x^{s+a} = x^{a+1}\big[1 + (s-1)\log x + (s-1)^2 \frac{\log^2 x}{2} + \dots\big]$$

$$\Gamma(s) = 1 + \Gamma'(1)(s-1) + \frac{1}{2}(s-1)^2\Gamma''(1) + \dots$$

$$\Gamma(s+a+1) = \Gamma(a+2) + (s-1)\Gamma'(a+2) + \frac{1}{2}(s-1)^2\Gamma''(a+2) + \dots$$

$$\frac{1}{\Gamma(s+a+1)} = \frac{1}{\Gamma(a+2)}\Big\{1 - \frac{\Gamma'}{\Gamma}(a+2)(s-1) + \frac{1}{2}\frac{2\Gamma'^2 - \Gamma\Gamma''}{\Gamma^2}(a+2)(s-1)^2 + \dots\Big\}$$

ce qui donne, en regroupant, et en utilisant le fait que $\Gamma'(1) = -\gamma$:

$$\mathrm{Res}\Big[\frac{\Gamma(s)x^{s+a}}{\Gamma(s+a+1)}E\Big(s,\frac{h}{k}\Big);s=1\Big] = \frac{x^{a+1}}{k\Gamma(a+2)}\Big\{c_2(k)\log^2 x+\Big[c_1(k)-2c_2(k)\Big(\gamma-1+\frac{\Gamma'}{\Gamma}(a+2)\Big)\Big]\log x$$

$$+\Big[c_0(k)-c_1(k)\Big(\gamma-1+\frac{\Gamma'}{\Gamma}(a+2)\Big)+2c_2(k)\Big(\frac{\Gamma'^2-\frac{1}{2}\Gamma\Gamma''}{\Gamma^2}(a+2)+(\gamma-1)\frac{\Gamma'}{\Gamma}(a+2)+\frac{\Gamma''(1)}{2}-\gamma\Big)\Big]\Big\}, \tag{112}$$

où on a posé comme auparavant:

$$\begin{cases} c_2(k) := \frac{1}{2}c_{-3}(k) \\ c_1(k) := -c_{-3}(k)\log k + (c_{-2}-c_{-3})(k) \\ c_0(k) := \frac{1}{2}c_{-3}(k)\log^2(k) + (c_{-3}-c_{-2})(k)\log k + (c_{-3}+c_{-1})(k) \end{cases}$$

Remarque : Dans le cas où $a \in \mathbf{N}$, on obtient:

$$\mathrm{Res}\Big[\frac{\Gamma(s)x^{s+a}}{\Gamma(s+a+1)}E\Big(s,\frac{h}{k}\Big);s=1\Big] = \frac{x^{a+1}}{k(a+1)!}\Big\{c_2(k)\log^2 x+\Big[c_1(k)-2c_2(k)\sum_{n=2}^{a+1}\frac{1}{n}\Big]\log x$$

$$+\Big[c_0(k)-c_1(k)\sum_{n=2}^{a+1}\frac{1}{n}+2c_2(k)\sum_{2\le m\le n\le a+1}\frac{1}{mn}\Big]\Big\}, \tag{113}$$

et en particulier, pour $a=0$, on retrouve:

$$\mathrm{Res}\Big[\frac{x^s}{s}E\Big(s,\frac{h}{k}\Big);s=1\Big] = \frac{x}{k}\big[c_2(k)\log^2 x + c_1(k)\log x + c_0(k)\big]. \tag{114}$$

– En $s=-\nu$ ($\nu \in \mathbf{N}$), on obtient comme résidu:

  – Si $a \notin \mathbf{N}$:

$$\mathrm{Res}\Big[\frac{\Gamma(s)x^{s+a}}{\Gamma(s+a+1)}E\Big(s,\frac{h}{k}\Big);s=-\nu\Big] = \frac{x^{a-\nu}(-1)^\nu}{\nu!\Gamma(a-\nu+1)}E\Big(-\nu,\frac{h}{k}\Big).$$

  – Si $a \in \mathbf{N}$:

$$\mathrm{Res}\Big[\frac{\Gamma(s)x^{s+a}}{\Gamma(s+a+1)}E\Big(s,\frac{h}{k}\Big);s=-\nu\Big] = \begin{cases} \frac{x^{a-\nu}(-1)^\nu}{\nu!(a-\nu)!}E\big(-\nu,\frac{h}{k}\big) & \text{pour } 0\le\nu\le a \\ 0 & \text{pour } \nu \ge a+1 \end{cases}$$

– En utilisant ce qui précède (toujours avec $a = 2+\varepsilon$), on trouve:

$$D_a\Big(x,\frac{h}{k}\Big) = \frac{x^{a+1}}{k\Gamma(a+2)}\Big\{c_2(k)\log^2 x+\Big[c_1(k)-2c_2(k)\Big(\gamma-1+\frac{\Gamma'}{\Gamma}(a+2)\Big)\Big]\log x$$

$$+\Big[c_0(k)-c_1(k)\Big(\gamma-1+\frac{\Gamma'}{\Gamma}(a+2)\Big)+2c_2(k)\Big(\frac{\Gamma'^2-\frac{1}{2}\Gamma\Gamma''}{\Gamma^2}(a+2)$$

$$+(\gamma-1)\frac{\Gamma'}{\Gamma}(a+2)+\frac{\Gamma''(1)}{2}-\gamma\Big)\Big]\Big\}+\sum_{\nu=0}^{2}\frac{x^{a-\nu}(-1)^\nu}{\nu!\Gamma(a-\nu+1)}E\Big(-\nu,\frac{h}{k}\Big)+\Delta_a\Big(x,\frac{h}{k}\Big), \tag{115}$$

avec:

$$\Delta_a\Big(x,\frac{h}{k}\Big) = \frac{1}{2i\pi}\int_{\mathcal{C}_b}E\Big(s,\frac{h}{k}\Big)\frac{x^{s+a}\Gamma(s)}{\Gamma(s+a+1)}ds. \tag{116}$$

– On utilise maintenant l'équation fonctionnelle (45), d'où:

$$\Delta_a\Big(x,\frac{h}{k}\Big)=\frac{k}{4i\pi^4}\int_{\mathcal{C}_b}\Big(\frac{2\pi}{k}\Big)^{3s}\Gamma^3(1-s)\Big[\Big(\sin\frac{s\pi}{2}\Big)^3\sum_{r=1}^{+\infty}\frac{1}{r^{1-s}}\sum_{lmn=r}\big(K_{-\overline{h},k}+K_{\overline{h},k}\big)(l,m,n)$$

$$+i\Big(\cos\frac{s\pi}{2}\Big)^3\sum_{r=1}^{+\infty}\frac{1}{r^{1-s}}\sum_{lmn=r}\big(K_{-\overline{h},k}-K_{\overline{h},k}\big)(l,m,n)\Big]\frac{x^{s+a}\Gamma(s)}{\Gamma(s+a+1)}ds.$$

Comme $a>\frac{3}{2}$, on peut supposer $\frac{1}{2}-\frac{a}{3}<b<0$, ce qui assure la convergence absolue de la somme double.
On peut donc inverser les sommes, d'où:

$$\Delta_a\Big(x,\frac{h}{k}\Big)=\frac{kx^a}{2\pi^3}\sum_{r=1}^{+\infty}\frac{1}{r}\Big[\frac{1}{2i\pi}\int_{\mathcal{C}_b}\Gamma^3(1-s)\Big(\sin\frac{s\pi}{2}\Big)^3\Big(\frac{8\pi^3xr}{k^3}\Big)^s\frac{\Gamma(s)ds}{\Gamma(s+a+1)}\Big]$$

$$\times\Big[\sum_{lmn=r}\big(K_{-\overline{h},k}+K_{\overline{h},k}\big)(l,m,n)\Big]$$

$$+\frac{ikx^a}{2\pi^3}\sum_{r=1}^{+\infty}\frac{1}{r}\Big[\frac{1}{2i\pi}\int_{\mathcal{C}_b}\Gamma^3(1-s)\Big(\cos\frac{s\pi}{2}\Big)^3\Big(\frac{8\pi^3xr}{k^3}\Big)^s\frac{\Gamma(s)ds}{\Gamma(s+a+1)}\Big]$$

$$\times\Big[\sum_{lmn=r}\big(K_{-\overline{h},k}-K_{\overline{h},k}\big)(l,m,n)\Big]$$

et finalement:

$$\Delta_a\Big(x,\frac{h}{k}\Big)=\frac{kx^a}{2\pi^3}\sum_{r=1}^{+\infty}\frac{1}{r}I_{a,b}\Big(\frac{8\pi^3xr}{k^3}\Big)\sum_{lmn=r}\big(K_{-\overline{h},k}+K_{\overline{h},k}\big)(l,m,n)$$

$$+\frac{ikx^a}{2\pi^3}\sum_{r=1}^{+\infty}\frac{1}{r}J_{a,b}\Big(\frac{8\pi^3xr}{k^3}\Big)\sum_{lmn=r}\big(K_{-\overline{h},k}-K_{\overline{h},k}\big)(l,m,n),\tag{117}$$

où on a posé, pour tout $X>0$:

$$I_{a,b}(X):=\frac{1}{2i\pi}\int_{\mathcal{C}_b}\Gamma^3(1-s)\Big(\sin\frac{s\pi}{2}\Big)^3\frac{X^s\Gamma(s)}{\Gamma(s+a+1)}ds,\tag{118}$$

$$J_{a,b}(X):=\frac{1}{2i\pi}\int_{\mathcal{C}_b}\Gamma^3(1-s)\Big(\cos\frac{s\pi}{2}\Big)^3\frac{X^s\Gamma(s)}{\Gamma(s+a+1)}ds.\tag{119}$$

– On a ainsi établi une formule de Voronoï pour $a=2+\varepsilon$ ($\varepsilon>0$). Remarquons que les intégrales $I_{a,b}(X)$ et $J_{a,b}(X)$ sont absolument convergentes pour $b>\frac{1}{2}-\frac{a}{3}$ et semi-convergentes pour $b\geq\frac{1}{6}-\frac{a}{3}$.
En effet, d'après (72), (73), (76) et (77), on dispose des majorations:

$$\Gamma^3(1-s)\Big(\sin\frac{s\pi}{2}\Big)^3\frac{X^s\Gamma(s)}{\Gamma(s+a+1)}\ll|t|^{\frac{1}{2}-a-3b}\tag{120}$$

et:

$$\Gamma^3(1-s)\Big(\cos\frac{s\pi}{2}\Big)^3\frac{X^s\Gamma(s)}{\Gamma(s+a+1)}\ll|t|^{\frac{1}{2}-a-3b},\tag{121}$$

si bien que pour $b_1\geq\frac{1}{6}$ et $b_2>\frac{1}{2}-\frac{a}{3}$, les intégrales:

$$\int_{[b_1\pm iT,b_2\pm iT]}\Gamma^3(1-s)\Big(\sin\frac{s\pi}{2}\Big)^3\frac{X^s\Gamma(s)}{\Gamma(s+a+1)}ds\ll\int_{b_1}^{b_2}T^{\frac{1}{2}-a-3\sigma}X^\sigma d\sigma$$

$$\ll \Big[\frac{T^{\frac{1}{2}-a-3\sigma}X^{\sigma}}{\log X-3\log T}\Big]_{b_1}^{b_2}$$

tendent vers 0 quand T tend vers $+\infty$.
Par conséquent la convergence absolue de $I_{a,b_2}(X)$ entraîne la semi-convergence de $I_{a,b_1}(X)$. De même pour $J_{a,b_1}(X)$.
On peut donc réécrire, pour $\frac{1}{6}-\frac{a}{3}\leq b<1$:

$$\Delta_a\Big(x,\frac{h}{k}\Big)=\frac{kx^a}{2\pi^3}\sum_{r=1}^{+\infty}\frac{1}{r}I_{a,b}\Big(\frac{8\pi^3xr}{k^3}\Big)\sum_{lmn=r}\big(K_{-\overline{h},k}+K_{\overline{h},k}\big)(l,m,n)$$

$$+\frac{ikx^a}{2\pi^3}\sum_{r=1}^{+\infty}\frac{1}{r}J_{a,b}\Big(\frac{8\pi^3xr}{k^3}\Big)\sum_{lmn=r}\big(K_{-\overline{h},k}-K_{\overline{h},k}\big)(l,m,n). \tag{122}$$

On prend donc $b\in\big[\frac{1}{6},1\big[$ quelconque, qui restera fixé dans la suite, et on note désormais:

$$\begin{cases} I_a(X):=I_{a,b}(X)\\ J_a(x):=J_{a,b}(X)\end{cases}$$

2. Passage au cas $a=1+\varepsilon$

a) Dérivation des intégrales $I_a(X)$ et $J_a(X)$

On va montrer le résultat suivant:

Lemme 1. *Pour $a\geq 1$, on a:*

$$\frac{d}{dx}\Big[x^aI_a\Big(\frac{8\pi^3xr}{k^3}\Big)\Big]=x^{a-1}I_{a-1}\Big(\frac{8\pi^3xr}{k^3}\Big), \tag{123}$$

$$\frac{d}{dx}\Big[x^aJ_a\Big(\frac{8\pi^3xr}{k^3}\Big)\Big]=x^{a-1}J_{a-1}\Big(\frac{8\pi^3xr}{k^3}\Big). \tag{124}$$

Preuve :

– Formellement, le résultat provient de:

$$\frac{d}{dx}\Big[x^a\Big(\frac{8\pi^3xr}{k^3}\Big)^s\Gamma(s+a+1)^{-1}\Big]=x^{a-1}\Big(\frac{8\pi^3xr}{k^3}\Big)^s\Gamma(s+(a-1)+1)^{-1}.$$

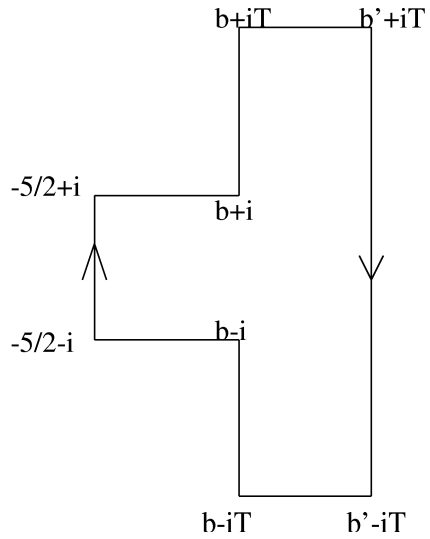
– Posons

$$g(s,x):=x^a\Gamma^3(1-s)\Big(\sin\frac{s\pi}{2}\Big)^3\Big(\frac{8\pi^3xr}{k^3}\Big)^s\frac{\Gamma(s)}{\Gamma(s+a+1)}.$$

On veut montrer que pour x_0 fixé:

$$\lim_{x\to x_0}\int_{\mathcal{C}_b}\Big[\frac{g(s,x)-g(s,x_0)}{x-x_0}-\frac{\partial g}{\partial x}(s,x_0)\Big]ds=0.$$

Soit $\varepsilon>0$. En intégrant sur le contour:



avec $b' > \frac{1}{2} - \frac{a}{3}$, et en utilisant les mêmes majorations que précédemment sur les segments horizontaux, on voit que l'on peut choisir T assez grand pour que:

$$\forall x \in \Big[\frac{x_0}{2},2x_0\Big],\ \Big|\int_{\substack{\mathcal{C}_b\\|t|>T}} \Big[\frac{g(s,x)-g(s,x_0)}{x-x_0} - \frac{\partial g}{\partial x}(s,x_0)\Big]ds\Big| \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

– Sur la partie tronquée à $|t| \leq T$ du contour $\mathcal{C}_b$, l'expression $\frac{g(s,x)-g(s,x_0)}{x-x_0}$ converge vers $\frac{\partial g}{\partial x}(s,x_0)$, ceci uniformément en s.
Par conséquent, il existe $\alpha > 0$ tel que pour $|x - x_0| < \alpha$:

$$\Big|\int_{\substack{\mathcal{C}_b\\|t|<T}} \Big[\frac{g(s,x)-g(s,x_0)}{x-x_0} - \frac{\partial g}{\partial x}(s,x_0)\Big]ds\Big| \leq \frac{\varepsilon}{2},$$

ce qui prouve le lemme.

b) Développement asymptotique de $I_a(X)$ et $J_a(X)$

On dispose du lemme très général suivant, que l'on peut trouver dans [3]:

Lemme 2. (Chandrasekharan & Narasimhan) *On pose, pour δ réel:*

$$G_\rho(s) := \frac{\Gamma(\delta - s)\Delta(s)}{\Gamma(\rho + 1 + \delta - s)\Delta(\delta - s)},$$

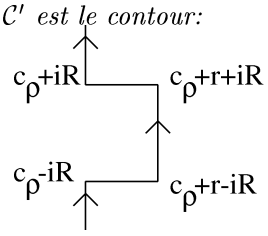
avec, pour $\alpha_\nu > 0$ et β_ν complexe:

$$\Delta(s) := \prod_{\nu=1}^{N} \Gamma(\alpha_\nu s + \beta_\nu).$$

Soit

$$\mathcal{I}_\rho(s) := \frac{1}{2i\pi}\int_{\mathcal{C}'} G_\rho(s)x^{\delta+\rho-s}ds,$$

où $\mathcal{C}'$ est le contour:



On suppose

$$c_\rho > c' := \max\Big(-\frac{\mathcal{R}](\beta_\nu)}{\alpha_\nu};\quad 1 \le \nu \le N\Big),$$

et r, R tels que tous les pôles de l'intégrande sont à gauche de $\mathcal{C}'$.

Si ρ est entier, on a pour tout $m \in \mathbf{N}$:

$$\mathcal{I}_\rho(x) = \sum_{\nu=0}^{m} e'_\nu x^{\frac{\omega-\frac12-\nu}{2A}} \cos\big(hx^{\frac{1}{2A}} + k_\nu\pi\big) + \mathcal{O}\big(x^{\frac{\omega-\frac12-m-1}{2A}}\big) \qquad (x \to +\infty), \qquad (125)$$

où les e'_ν sont des constantes, et:

$$A := \sum_{\nu=1}^{N} \alpha_\nu;\quad \omega := A\delta + (2A-1)\rho;\quad \theta := 2\Big[\sum_{\nu=1}^{N} \alpha_\nu \log\alpha_\nu - A\log A\Big];\quad h := 2e^{-\frac{\theta}{2A}};$$

$$\mu := \frac12 + \sum_{\nu=1}^{N}\Big(\beta_\nu - \frac12\Big);\quad \tilde a := \Big(-\frac{\delta}{2} + \frac{\rho}{2A} + \frac{1}{4A}\Big);\quad k := A\tilde a - \mu;\quad k_\nu := k + \frac{\nu}{2}.$$

On a en fait besoin ici d'une version légèrement modifiée de ce résultat, de manière à prendre en compte des valeurs non entières de ρ, et à se passer de l'hypothèse concernant les pôles de l'intégrande. On reprend ici la démonstration du lemme donnée dans [3], en mettant l'accent sur les changements à apporter.

– Posons:

$$F_0^\rho(s) := \frac{2A\pi h^{-2A(s+\tilde a)}\Gamma(2As+2A\tilde a)}{\Gamma\big(-As-A\tilde a+\frac12-k\big)\Gamma\big(\frac12+As+A\tilde a+k\big)}$$

$$= 2Ah^{-2A(s+\tilde a)}\Gamma(2As+2A\tilde a)\cos\pi(As+A\tilde a+k),$$

d'après la formule des compléments.

La formule de Stirling donne d'une part:

$$\log G_\rho(s) = \log\Gamma(\delta-s) + \sum_{\nu\le N}\log\Gamma(\alpha_\nu s+\beta_\nu) - \log\Gamma(\rho+\delta+1-s) - \sum_{\nu\le N}\log\Gamma(\alpha_\nu(\delta-s)+\beta_\nu)$$

$$= \big(As+\mu-\frac12\big)\log s + \big(As-A\delta-\rho-\frac12-\mu\big)\log(-s) - 2As + s\sum_{\nu\le N} 2\alpha_\nu\log\alpha_\nu$$

$$-\sum_{\nu\le N}(\alpha_\nu\delta)\log\alpha_\nu + \sum_{\nu\le m} c_\nu^{(1)} s^{-\nu} + \mathcal{O}\big(|s|^{-m-1}\big),$$

et d'autre part:

$$\log c_0F_0^\rho(s) = \big(As+\mu-\frac12\big)\log s + \big(As-A\delta-\rho-\frac12-\mu\big)\log(-s) - 2As + s\sum_{\nu\le N}2\alpha_\nu\log\alpha_\nu$$

$$-\delta\sum_{\nu\le N}\alpha_\nu\log\alpha_\nu + \sum_{\nu\le m} c_\nu^{(2)} s^{-\nu} + \mathcal{O}\big(|s|^{-m-1}\big),$$

à condition de choisir:

$$\begin{cases} c_0 := \exp\big(B + \frac{\delta\theta}{2} + \frac{\rho\theta}{2A} + \frac{\theta}{4A}\big)(A\sqrt{\pi})^{-1} = \exp(B-\tilde a\theta)(A\sqrt{\pi})^{-1}, \\ B := \delta\sum\limits_{\nu\le N}\alpha_\nu\log\alpha_\nu + (A\delta+\rho+a)\log A. \end{cases}$$

– Par conséquent:

$$G_\rho(s) = c_0 F_0^\rho(s)\Big[1 + \sum_{\nu=1}^{m} \frac{c'_\nu}{(2As)^\nu} + \mathcal{O}\Big(\frac{1}{|s|^{m+1}}\Big)\Big]$$

$$= c_0 F_0^\rho(s)\Big[1 + \sum_{\nu=1}^{m} \frac{c''_\nu}{(2As+2A\tilde{a}-1)\dots(2As+2A\tilde{a}-\nu)} + \mathcal{O}\Big(\frac{1}{|s|^{m+1}}\Big)\Big]$$

$$= \sin\big(\pi\big(As + A\tilde{a} + k + \frac{1}{2}\big)\big) \sum_{\nu=0}^{m} E_\nu \Gamma(2As+2A\tilde{a}-\nu) + F_0^\rho(s)\mathcal{O}\Big(\frac{1}{|s|^{m+1}}\Big)$$

$$= \sum_{\nu=0}^{m} F_\nu^\rho(s) + F_0^\rho(s)\mathcal{O}\Big(\frac{1}{|s|^{m+1}}\Big),$$

avec:

$$\begin{cases} E_\nu = E_\nu(s) := 2Ac_0c''_\nu h^{-2A(s+\tilde{a})} \\ F_\nu^\rho(s) := \frac{e_\nu 2A\pi h^{-2A(s+\tilde{a})}\Gamma(2As+2A\tilde{a}-\nu)}{\Gamma\big(-As-A\tilde{a}+\frac{1}{2}-k\big)\Gamma\big(\frac{1}{2}+As+A\tilde{a}+k\big)} \\ e_\nu := c_0c''_\nu. \end{cases}$$

Donc:

$$\mathcal{I}_\rho(s) = \frac{x^{\delta+\rho}}{2i\pi}\int_{\mathcal{C}'} G_\rho(s)x^{-s}ds$$

$$= \frac{x^{\delta+\rho}}{2i\pi}\Big[\int_{\mathcal{C}'}\sum_{\nu=0}^{m} F_\nu^\rho(s)x^{-s}ds + \int_{\mathcal{C}'} F_0^\rho(s)\mathcal{O}\Big(\frac{1}{|s|^{m+1}}\Big)x^{-s}ds\Big].$$

Or on a:

$$\frac{1}{2i\pi}\int_{\mathcal{C}'} F_\nu^\rho(s)x^{-s}ds = 2A\frac{e_\nu}{2i\pi}\int_{\mathcal{C}'} h^{-2A(s+\tilde{a})}\sin\big(\pi\big(As+A\tilde{a}+k+\frac{1}{2}\big)\big)\Gamma(2As+2A\tilde{a}-\nu)x^{-s}ds.$$

En posant $u = 2As + 2A\tilde{a} - \nu$, on obtient:

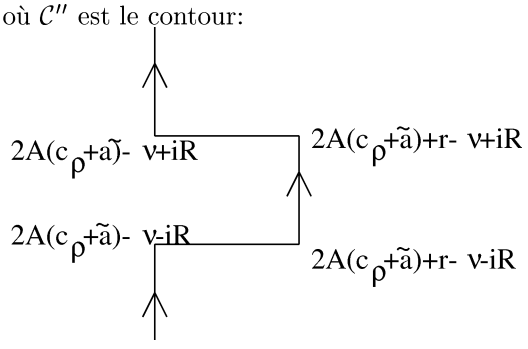
$$\frac{e_\nu h^{-\nu}x^{\tilde{a}-\frac{\nu}{2A}}}{2i\pi}\int_{2A\mathcal{C}'+2A\tilde{a}-\nu} h^{-u}\sin\Big(\pi\Big(\frac{u+v}{2}+k+\frac{1}{2}\Big)\Big)\Gamma(u)x^{-\frac{u}{2A}}du$$

$$= \underbrace{e_\nu h^{-\nu}}_{e'_\nu}x^{\tilde{a}-\frac{\nu}{2A}}\frac{1}{2i\pi}\int_{2A\mathcal{C}'+2A\tilde{a}-\nu}\cos\big(\pi k_\nu + \frac{\pi u}{2}\big)\Gamma(u)\big(hx^{\frac{1}{2A}}\big)^{-u}du.$$

On a ainsi montré que:

$$\frac{x^{\delta+\rho}}{2i\pi}\int_{\mathcal{C}'} F_\nu^\rho(s)x^{-s}ds = e'_\nu x^{\frac{\omega-\frac{1}{2}-\nu}{2A}}\frac{1}{2i\pi}\int_{\mathcal{C}''}\cos\big(\pi k_\nu + \frac{\pi u}{2}\big)\Gamma(u)\big(hx^{\frac{1}{2A}}\big)^{-u}du$$

où $\mathcal{C}''$ est le contour:



Sous les hypothèses du lemme de Chandrasekharan et Narasimhan, le fait que tous les pôles se trouvent à gauche de $\mathcal{C}'$ autorise à choisir r assez grand pour que:

$$\int_{\mathcal{C}''} \cos\big(\pi k_\nu + \frac{\pi u}{2}\big)\Gamma(u)\big(hx^{\frac{1}{2A}}\big)^{-u}du = \cos\big(hx^{\frac{1}{2A}} + k_\nu\pi\big).$$

Si on ne fait pas cette hypothèse, on ne peut pas modifier r et l'égalité précédente ne sera vérifiée qu'à condition de supposer $\nu < 2A(c_\rho + \tilde{a}) + r$.

– On a donc montré que dans le cas qui nous intéresse, le développement asymptotique donné par le lemme 2 reste valable à condition de se limiter à $m < 2A(c_\rho + \tilde{a}) + r$.

– **Application à $I_a(X)$:**
Prenons d'abord $\alpha_\nu = \frac{1}{2}$, $\beta_\nu = 0$, $\delta = 1$, $\rho = a$ et $N = 3$, d'où

$$\frac{\Delta(s)}{\Delta(1-s)} = \Big(\frac{\Gamma\big(\frac{s}{2}\big)}{\Gamma\big(\frac{1-s}{2}\big)}\Big)^3 = \Gamma^3(s)\Big(\cos\frac{s\pi}{2}\Big)^3 2^{3(1-s)}\pi^{-\frac{3}{2}}.$$

On prend $c_\rho = 1 - b$ et $r = \frac{5}{2} + b$. On a donc:

$$I_a(X) = \pi^{\frac{3}{2}}\mathcal{I}_a\Big(\frac{X}{8}\Big)\Big(\frac{X}{8}\Big)^{-a},$$

et le lemme donne ainsi, pour $m < \frac{19}{6} - \frac{a}{3}$:

$$I_a(X) = \sum_{\nu=0}^{m} e_\nu X^{\frac{1-a-\nu}{3}}\cos\Big(3X^{\frac{1}{3}} + \frac{(-a+\nu)\pi}{2}\Big) + \mathcal{O}\big(X^{\frac{-a-m}{3}}\big) \quad (X \to +\infty). \tag{126}$$

Ainsi pour $\begin{cases} a = 2+\varepsilon \\ a = 1+\varepsilon \\ a = \varepsilon \end{cases}$, on peut prendre $\begin{cases} m = 2 \\ m = 2 \\ m = 3 \end{cases}$ (ε étant assez petit).

– **Application à $J_a(X)$:**
Prenons maintenant $\alpha_\nu = \frac{1}{2}$, $\beta_\nu = \frac{1}{2}$, $\delta = 1$, $\rho = a$ et $N = 3$, d'où

$$\frac{\Delta(s)}{\Delta(1-s)} = \Big(\frac{\Gamma\big(\frac{s+1}{2}\big)}{\Gamma\big(1-\frac{s}{2}\big)}\Big)^3 = \Gamma^3(s)\Big(\sin\frac{s\pi}{2}\Big)^3 2^{3(1-s)}\pi^{-\frac{3}{2}}$$

puis comme précédemment:

$$J_a(X) = \pi^{\frac{3}{2}}\mathcal{I}_a\Big(\frac{X}{8}\Big)\Big(\frac{X}{8}\Big)^{-a},$$

et le lemme donne ainsi, toujours pour $m < \frac{19}{6} - \frac{a}{3}$:

$$J_a(X) = \sum_{\nu=0}^{m} e'_\nu X^{\frac{1-a-\nu}{3}}\sin\Big(3X^{\frac{1}{3}} + \frac{(-a+\nu)\pi}{2}\Big) + \mathcal{O}\big(X^{\frac{-a-m}{3}}\big) \quad (X \to +\infty). \tag{127}$$

c) Dérivation des termes principaux

Pour $a = 2 + \varepsilon$, on a obtenu:

$$D_a\Big(x, \frac{h}{k}\Big) = \frac{x^{a+1}}{k\Gamma(a+2)}\Big\{c_2(k)\log^2 x + \Big[c_1(k) - 2c_2(k)\Big(\gamma - 1 + \frac{\Gamma'}{\Gamma}(a+2)\Big)\Big]\log x$$

$$+\Big[c_0(k) - c_1(k)\Big(\gamma - 1 + \frac{\Gamma'}{\Gamma}(a+2)\Big) + 2c_2(k)\Big(\frac{\Gamma'^2 - \frac{1}{2}\Gamma\Gamma''}{\Gamma^2}(a+2)\Big)$$

$$+(\gamma-1)\frac{\Gamma'}{\Gamma}(a+2)+\frac{\Gamma''(1)}{2}-\gamma\Big)\Big]\Big\}+\sum_{\nu=0}^{2}\frac{x^{a-\nu}(-1)^{\nu}}{\nu!\Gamma(a-\nu+1)}E\Big(-\nu,\frac{h}{k}\Big)+\Delta_a\Big(x,\frac{h}{k}\Big).$$

Pour étudier les cas $a=1+\varepsilon$, puis $a=\varepsilon$, on part du fait que:

$$D_{a-1}\Big(x,\frac{h}{k}\Big)=\frac{d}{dx}D_a\Big(x,\frac{h}{k}\Big). \tag{128}$$

On a besoin de connaître la dérivée des termes principaux:

– En utilisant les relations suivantes:

$$\frac{\Gamma'}{\Gamma}(a+2)=\frac{\Gamma'}{\Gamma}(a+1)+\frac{1}{a+1} \tag{129}$$

$$\frac{\Gamma'^2-\frac{1}{2}\Gamma\Gamma''}{\Gamma^2}(a+2)=\frac{\Gamma'^2-\frac{1}{2}\Gamma\Gamma''}{\Gamma^2}(a+1)+\frac{1}{a+1}\frac{\Gamma'}{\Gamma}(a+2), \tag{130}$$

dont la démonstration est immédiate (en partant de $\Gamma(z+1)=z\Gamma(z)$), on obtient:

$$\frac{d}{dx}\Big\{\frac{x^{a+1}}{k\Gamma(a+2)}\Big\{c_2(k)\log^2 x+\Big[c_1(k)-2c_2(k)\Big(\gamma-1+\frac{\Gamma'}{\Gamma}(a+2)\Big)\Big]\log x$$

$$+\Big[c_0(k)-c_1(k)\Big(\gamma-1+\frac{\Gamma'}{\Gamma}(a+2)\Big)+2c_2(k)\Big(\frac{\Gamma'^2-\frac{1}{2}\Gamma\Gamma''}{\Gamma^2}(a+2)+(\gamma-1)\frac{\Gamma'}{\Gamma}(a+2)+\frac{\Gamma''(1)}{2}-\gamma\Big)\Big]\Big\}\Big\}$$

$$=\frac{x^a}{k\Gamma(a+1)}\Big\{c_2(k)\log^2 x+\Big[c_1(k)-2c_2(k)\Big(\gamma-1+\frac{\Gamma'}{\Gamma}(a+1)\Big)\Big]\log x$$

$$+\Big[c_0(k)-c_1(k)\Big(\gamma-1+\frac{\Gamma'}{\Gamma}(a+1)\Big)+2c_2(k)\Big(\frac{\Gamma'^2-\frac{1}{2}\Gamma\Gamma''}{\Gamma^2}(a+1)+(\gamma-1)\frac{\Gamma'}{\Gamma}(a+1)+\frac{\Gamma''(1)}{2}-\gamma\Big)\Big]\Big\}. \tag{131}$$

– Par ailleurs, on a:

$$\frac{d^2}{dx^2}\sum_{\nu=0}^{2}\frac{x^{a-\nu}(-1)^{\nu}}{\nu!\Gamma(a-\nu+1)}E\Big(-\nu,\frac{h}{k}\Big)=\sum_{\nu=0}^{2}\frac{x^{a-\nu-2}(-1)^{\nu}E\big(-\nu,\frac{h}{k}\big)}{\nu!\Gamma(a-1-\nu)}, \tag{132}$$

et cette somme tend vers $E\big(0,\frac{h}{k}\big)$ quand ε tend vers 0.

– Par conséquent, la formule de Voronoï obtenue précédemment pour $a=2+\varepsilon$ est aussi valable pour $a=\varepsilon$, à condition de poser:

$$\Delta_\varepsilon\Big(x,\frac{h}{k}\Big)=\frac{d^2}{dx^2}\Delta_{2+\varepsilon}\Big(x,\frac{h}{k}\Big),$$

dont on va chercher une expression explicite sous la forme d'une série.

d) Le cas $a=1+\varepsilon$

On sait que:

$$\Delta_{2+\varepsilon}\Big(x,\frac{h}{k}\Big)=\frac{kx^{2+\varepsilon}}{2\pi^3}\sum_{r=1}^{+\infty}\frac{1}{r}I_{2+\varepsilon}\Big(\frac{8\pi^3xr}{k^3}\Big)\sum_{lmn=r}\big(K_{-\overline{h},k}+K_{\overline{h},k}\big)(l,m,n)$$

$$+\frac{ikx^{2+\varepsilon}}{2\pi^3}\sum_{r=1}^{+\infty}\frac{1}{r}J_{2+\varepsilon}\Big(\frac{8\pi^3xr}{k^3}\Big)\sum_{lmn=r}\big(K_{-\overline{h},k}-K_{\overline{h},k}\big)(l,m,n).$$

Par ailleurs, comme $I_{1+\varepsilon} \ll X^{-\varepsilon}$ et $J_{1+\varepsilon}(X) \ll X^{-\varepsilon}$, les séries:

$$\sum_{r=1}^{+\infty} \frac{1}{r} I_{2+\varepsilon}\Big(\frac{8\pi^3 xr}{k^3}\Big) \sum_{lmn=r} \big(K_{-\overline{h},k} + K_{\overline{h},k}\big)(l,m,n)$$

et

$$\sum_{r=1}^{+\infty} \frac{1}{r} J_{2+\varepsilon}\Big(\frac{8\pi^3 xr}{k^3}\Big) \sum_{lmn=r} \big(K_{-\overline{h},k} - K_{\overline{h},k}\big)(l,m,n)$$

sont normalement convergentes sur tout intervalle $[x_1,x_2]$ inclus dans $]0,+\infty[$. Par conséquent, on peut dériver $\Delta_{2+\varepsilon}\big(x,\frac{h}{k}\big)$ terme à terme et on obtient ainsi:

$$\Delta_{1+\varepsilon}\Big(x,\frac{h}{k}\Big) = \frac{kx^{1+\varepsilon}}{2\pi^3} \sum_{r=1}^{+\infty} \frac{1}{r} I_{1+\varepsilon}\Big(\frac{8\pi^3 xr}{k^3}\Big) \sum_{lmn=r} \big(K_{-\overline{h},k} + K_{\overline{h},k}\big)(l,m,n)$$

$$+ \frac{ikx^{1+\varepsilon}}{2\pi^3} \sum_{r=1}^{+\infty} \frac{1}{r} J_{1+\varepsilon}\Big(\frac{8\pi^3 xr}{k^3}\Big) \sum_{lmn=r} \big(K_{-\overline{h},k} - K_{\overline{h},k}\big)(l,m,n). \tag{133}$$

3. Le cas $a = \varepsilon$

a) Une somme duale de $D_a(x,\frac{h}{k})$

Si on dérive formellement $\Delta_{1+\varepsilon}\big(x,\frac{h}{k}\big)$, on obtient:

$$\Delta_{\varepsilon}\big(x,\frac{h}{k}\big) = \frac{kx^{\varepsilon}}{2\pi^3} \sum_{r=1}^{+\infty} \frac{1}{r} I_{\varepsilon}\Big(\frac{8\pi^3 xr}{k^3}\Big) \sum_{lmn=r} \big(K_{-\overline{h},k} + K_{\overline{h},k}\big)(l,m,n)$$

$$+ \frac{ikx^{\varepsilon}}{2\pi^3} \sum_{r=1}^{+\infty} \frac{1}{r} J_{\varepsilon}\Big(\frac{8\pi^3 xr}{k^3}\Big) \sum_{lmn=r} \big(K_{-\overline{h},k} - K_{\overline{h},k}\big)(l,m,n). \tag{134}$$

Pour étudier la convergence des séries qui apparaissent ainsi, on introduit la somme suivante, «duale» de $D_a\big(x,\frac{h}{k}\big)$:

$$M_a\Big(x,\frac{h}{k}\Big) := \frac{1}{\Gamma(a+1)} \sum_{n\le x}{}' (x-n)^a \sum_{\alpha\beta\gamma=n} K_{h,k}(\alpha,\beta,\gamma). \tag{135}$$

– La série de Dirichlet associée est définie, pour $\sigma > 1$, par:

$$F\Big(s,\frac{h}{k}\Big) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^s} \sum_{\alpha\beta\gamma=n} K_{h,k}(\alpha,\beta,\gamma). \tag{136}$$

En l'écrivant sous la forme

$$F\Big(s,\frac{h}{k}\Big) = k^{-3s} \sum_{a,b,c=1}^{k} K_{h,k}(a,b,c)\zeta\Big(s,\frac{a}{k}\Big)\zeta\Big(s,\frac{b}{k}\Big)\zeta\Big(s,\frac{c}{k}\Big), \tag{137}$$

on voit que F se prolonge analytiquement en une fonction méromorphe sur $\mathbf{C}$, avec comme seul pôle éventuel un pôle au plus triple en $s=1$. Par ailleurs $F\big(s,\frac{h}{k}\big)$ est lié à $E\big(s,\frac{h}{k}\big)$ par l'équation fonctionnelle suivante:

$$F\Big(1-s,\frac{b}{k}\Big) = \frac{4\Gamma^3(s)k^{3s-1}}{(2\pi)^{3s}} \Big\{\Big[\Big(\cos\frac{s\pi}{2}\Big)^3 + i\Big(\sin\frac{s\pi}{2}\Big)^3\Big] E\Big(s,\frac{\bar{b}}{k}\Big)$$

$$+\Big[\Big(\cos\frac{s\pi}{2}\Big)^3-i\Big(\sin\frac{s\pi}{2}\Big)^3\Big]E\Big(s,-\frac{\overline{b}}{k}\Big)\Big\},\tag{138}$$

la démonstration étant exactement la même que pour l'équation fonctionnelle (43):

$$E\Big(1-s,\frac{b}{k}\Big)=\frac{4\Gamma^3(s)k^{3s-2}}{(2\pi)^{3s}}\Big\{\Big[\Big(\cos\frac{s\pi}{2}\Big)^3+i\Big(\sin\frac{s\pi}{2}\Big)^3\Big]F\Big(s,\frac{\overline{b}}{k}\Big)+$$

$$\Big[\Big(\cos\frac{s\pi}{2}\Big)^3-i\Big(\sin\frac{s\pi}{2}\Big)^3\Big]F\Big(s,-\frac{\overline{b}}{k}\Big)\Big\}.$$

– En suivant exactement la même méthode que pour $\Delta_0\big(x,\frac{h}{k}\big)$, on va établir une formule de Voronoï tronquée pour $M_0\big(x,\frac{h}{k}\big)=:M\big(x,\frac{h}{k}\big)$.
On fixe $\delta>0$ et on utilise la formule de Perron sous la forme suivante (cf [16] ou [15]):

Théorème A. *On considère la série de Dirichlet*

$$f(s):=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{a_n}{n^s}\quad(\sigma>1),$$

où $a_n=\mathcal{O}(\psi(n))$, avec ψ croissante, et:

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{|a_n|}{n^\sigma}=\mathcal{O}\Big(\frac{1}{(\sigma-1)^\alpha}\Big)\quad(\sigma\to1)$$

Alors, si $c>1$ et si N désigne l'entier le plus proche de x, on a pour x non entier:

$$\sum_{n\le x}a_n=\frac{1}{2i\pi}\int_{c-iT}^{c+iT}f(\omega)\frac{x^\omega}{\omega}d\omega+\mathcal{O}\Big(\frac{x^c}{T(c-1)^\alpha}\Big)+\mathcal{O}\Big(\frac{\psi(2x)x\log x}{T}\Big)+\mathcal{O}\Big(\frac{\psi(N)x}{T|x-N|}\Big),\tag{139}$$

et pour x entier naturel:

$$\sum_{n\le x-1}a_n+\frac{1}{2}a_x=\frac{1}{2i\pi}\int_{c-iT}^{c+iT}f(\omega)\frac{x^\omega}{\omega}d\omega+\mathcal{O}\Big(\frac{x^c}{T(c-1)^\alpha}\Big)+\mathcal{O}\Big(\frac{\psi(2x)x\log x}{T}\Big)+\mathcal{O}\Big(\frac{\psi(x)}{T}\Big).\tag{140}$$

On commence par écrire la somme sous la forme:

$$M\Big(x,\frac{b}{k}\Big)=\sum_{n\le x}{}'\sum_{\alpha\beta\gamma=n}K_{b,k}(\alpha,\beta,\gamma)=\sum_{d|k}\sum_{\substack{n\le x\\(n,k)=\frac{k}{d}}}\sum_{\alpha\beta\gamma=n}K_{b,k}(\alpha,\beta,\gamma)$$

$$=\sum_{d|k}\sum_{\substack{m\le\frac{xd}{k}\\(m,d)=1}}\sum_{\alpha\beta\gamma=\frac{mk}{d}}K_{b,k}(\alpha,\beta,\gamma)$$

$$=k\tau_3(k)\sum_{d|k}\frac{1}{\sqrt{d}}\Big\{\sum_{\substack{m\le\frac{xd}{k}\\(m,d)=1}}\frac{1}{\sqrt{k}\tau_3(k)\big(\frac{k}{d}\big)^{\frac12}}\sum_{\alpha\beta\gamma=\frac{mk}{d}}K_{b,k}(\alpha,\beta,\gamma)\Big\}.$$

Si on pose:

$$a_m:=\begin{cases}\frac{\sqrt{d}}{k\tau_3(k)}\sum\limits_{\alpha\beta\gamma=\frac{mk}{d}}K_{b,k}(\alpha,\beta,\gamma) & \text{si } (m,d)=1\\ 0 & \text{si } (m,d)\neq1\end{cases}$$

on peut appliquer le théorème avec $\psi(n) = n^{\frac{\delta}{2}}$, $\alpha = 3$ et $c = 1+\delta$. Par conséquent:

$$M\Big(x,\frac{b}{k}\Big) = k\tau_3(k)\sum_{d|k}\frac{1}{\sqrt{d}}\Big[\frac{1}{2i\pi}\int_{c-iT}^{c+iT}\sum_{\substack{m=1\\(m,d)=1}}^{+\infty}\frac{\sqrt{d}}{k\tau_3(k)m^s}\sum_{\alpha\beta\gamma=\frac{mk}{d}}K_{b,k}(\alpha,\beta,\gamma)\Big(\frac{xd}{k}\Big)^s ds$$

$$+\mathcal{O}\Big(\frac{1}{T}\Big(\frac{xd}{k}\Big)^{1+\delta}\Big)\Big]$$

$$= \sum_{d|k}\frac{1}{2i\pi}\int_{c-iT}^{c+iT}\frac{x^s}{s}ds\sum_{\substack{m=1\\(m,d)=1}}^{+\infty}\frac{1}{\big(\frac{mk}{d}\big)^s}\sum_{\alpha\beta\gamma=\frac{mk}{d}}K_{b,k}(\alpha,\beta,\gamma)$$

$$+\mathcal{O}\Big(\frac{1}{T}x^{1+\delta}\frac{\tau_3(k)}{k^\delta}\sum_{d|k}d^{\frac{1}{2}+\delta}\Big),$$

d'où:

$$M\Big(x,\frac{b}{k}\Big) = \frac{1}{2i\pi}\int_{c-it}^{c+iT}F\Big(s,\frac{b}{k}\Big)\frac{x^s}{s}ds + \mathcal{O}\Big(\frac{x^{1+\delta}}{T}k^{\frac{1}{2}}\tau_3(k)\Big). \tag{141}$$

– Ensuite, on déplace le contour d'intégration vers le segment $\{\sigma = -\delta, |t| \le T\}$. Pour cela, on a besoin d'une estimation de $F\big(s,\frac{b}{k}\big)$ dans la bande $-\delta \le \sigma \le 1+\delta$.

  – Sur la droite $\{\sigma = 1+\delta\}$, on a:

$$F\Big(s,\frac{b}{k}\Big) = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^s}\sum_{\alpha\beta\gamma=n}K_{b,k}(\alpha,\beta,\gamma)$$

$$\ll \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{k^{\frac{1}{2}}\tau_3(k)(k,n)^{\frac{1}{2}}\tau_3(n)}{n^{1+\delta}} \ll k^{\frac{1}{2}}\tau_3(k)\tau(k).$$

  – Sur la droite $\{\sigma = -\delta\}$, on a, d'après l'équation fonctionnelle (138):

$$F\Big(s,\frac{b}{k}\Big) = \frac{4\Gamma^3(1-s)k^{2-3s}}{(2\pi)^{3-3s}}\Big\{\Big(\sin\frac{s\pi}{2}\Big)^3\sum_{r=1}^{+\infty}\frac{\tau_3(r)}{r^{1-s}}\Big[e\Big(\frac{r\bar{b}}{k}\Big)+e\Big(-\frac{r\bar{b}}{k}\Big)\Big]$$

$$+i\Big(\cos\frac{s\pi}{2}\Big)^3\sum_{r=1}^{+\infty}\frac{\tau_3(r)}{r^{1-s}}\Big[e\Big(\frac{r\bar{b}}{k}\Big)-e\Big(-\frac{r\bar{b}}{k}\Big)\Big]\Big\}.$$

  Comme $\Gamma^3(1-s)\big(\sin\frac{s\pi}{2}\big)^3$ et $\Gamma^3(1-s)\big(\cos\frac{s\pi}{2}\big)^3$ sont $\ll |t|^{\frac{3}{2}+3\delta}$, on obtient pour $\sigma = -\delta$:

$$F\Big(s,\frac{b}{k}\Big) \ll |t|^{\frac{3}{2}+3\delta}k^{2+3\delta} = \big(k|t|\big)^{\frac{3}{2}+3\delta}k^{\frac{1}{2}}.$$

Si on considère la fonction auxiliaire:

$$\tilde{F}\Big(s,\frac{b}{k}\Big) = \Big(\frac{s-1}{s-2}\Big)^3F\Big(s,\frac{b}{k}\Big)\frac{(k^{\frac{3}{2}})^{s-1-\delta}}{\sqrt{k}\tau_3(k)\tau(k)}\big[\tau(k)\tau_3(k)\big]^{-\frac{s-1-\delta}{1+2\delta}},$$

qui est holomorphe dans la bande $-\delta \le \sigma \le 1+\delta$, on obtient d'après le principe de Phragmen-Lindelöf:

$$\tilde{F}\Big(s,\frac{b}{k}\Big) \ll (1+|t|)^{\frac{3}{2}(1+\delta-\sigma)}$$

pour $-\delta \leq \sigma \leq 1+\delta$.
Par conséquent, dans la zone $-\delta \leq \sigma \leq 1+\delta$, $|t| \geq 1$, on a:

$$F\Big(s,\frac{b}{k}\Big) \ll (k|t|)^{\frac{3}{2}(1+\delta-\sigma)}\sqrt{k}. \tag{142}$$

– En faisant l'hypothèse $1 \leq T \ll \frac{x^{\frac{2}{3}}}{k}$, on obtient alors:

$$M\Big(x,\frac{b}{k}\Big) = \mathrm{Res}\Big(F\Big(s,\frac{b}{k}\Big)\frac{x^s}{s};s=1\Big)+F\Big(0,\frac{b}{k}\Big)+\frac{1}{2i\pi}\int_{\delta-iT}^{\delta+iT}F\Big(s,\frac{b}{k}\Big)\frac{x^s}{s}ds+\mathcal{O}\Big(\frac{x^{1+2\delta}}{T}\tau_3(k)\sqrt{k}\Big).$$

On pose:

$$\Phi\Big(x,\frac{b}{k}\Big) = \Phi_0\Big(x,\frac{b}{k}\Big) := M\Big(x,\frac{b}{k}\Big) - \mathrm{Res}\Big(F\Big(s,\frac{b}{k}\Big)\frac{x^s}{s};s=1\Big) - F\Big(0,\frac{b}{k}\Big).$$

On a ainsi obtenu, pour $1 \leq T \ll \frac{x^{\frac{2}{3}}}{k}$:

$$\Phi\Big(x,\frac{b}{k}\Big) = \frac{1}{2i\pi}\int_{-\delta-iT}^{-\delta+iT}F\Big(s,\frac{b}{k}\Big)\frac{x^s}{s}ds + \mathcal{O}\Big(\frac{x^{1+2\delta}}{T}k^{\frac{1}{2}}\tau_3(k)\Big). \tag{143}$$

– L'équation fonctionnelle (138) permet d'écrire:

$$\Phi\Big(x,\frac{b}{k}\Big) = \frac{1}{2i\pi}\int_{-\delta-iT}^{-\delta+iT}\frac{4\Gamma^3(1-s)k^{2-3s}}{(2\pi)^{3-3s}}\Big[\Big(\sin\frac{s\pi}{2}\Big)^3\sum_{r=1}^{+\infty}\frac{\tau_3(r)}{r^{1-s}}\Big(e\Big(\frac{\overline{b}r}{k}\Big)+e\Big(-\frac{\overline{b}r}{k}\Big)\Big)$$

$$+i\Big(\cos\frac{s\pi}{2}\Big)^3\sum_{r=1}^{+\infty}\frac{\tau_3(r)}{r^{1-s}}\Big(e\Big(\frac{\overline{b}r}{k}\Big)-e\Big(-\frac{\overline{b}r}{k}\Big)\Big)\Big]\frac{x^s}{s}ds+\mathcal{O}\Big(\frac{x^{1+2\delta}}{T}k^{\frac{1}{2}}\tau_3(k)\Big),$$

d'où:

$$\Phi\Big(x,\frac{b}{k}\Big) = \frac{k^2}{2\pi^3}\sum_{r=1}^{+\infty}\frac{\tau_3(r)}{r}\tilde{I}\Big(\frac{8\pi^3xr}{k^3}\Big)\Big[e\Big(\frac{\overline{b}r}{k}\Big)+e\Big(-\frac{\overline{b}r}{k}\Big)\Big]$$

$$+i\frac{k^2}{2\pi^3}\sum_{r=1}^{+\infty}\frac{\tau_3(r)}{r}\tilde{J}\Big(\frac{8\pi^3xr}{k^3}\Big)\Big[e\Big(\frac{\overline{b}r}{k}\Big)-e\Big(-\frac{\overline{b}r}{k}\Big)\Big]$$

$$+\mathcal{O}\Big(\frac{x^{1+2\delta}}{T}k^{\frac{1}{2}}\tau_3(k)\Big), \tag{144}$$

avec, pour $X>0$:

$$\tilde{I}(X) := \frac{1}{2i\pi}\int_{-\delta-iT}^{-\delta+iT}\Gamma^3(1-s)\Big(\sin\frac{s\pi}{2}\Big)^3\frac{X^s}{s}ds, \tag{145}$$

$$\tilde{J}(X) := \frac{1}{2i\pi}\int_{-\delta-iT}^{-\delta+iT}\Gamma^3(1-s)\Big(\cos\frac{s\pi}{2}\Big)^3\frac{X^s}{s}ds. \tag{146}$$

– La suite des calculs est alors exactement semblable au cas de $\Delta_0\big(x,\frac{h}{k}\big)$: on tronque la série à N, puis on remplace $\tilde{I}$ par I et $\tilde{J}$ par $J-1$, et on fait un développement asymptotique de ces intégrales.
La seule différence est que – lors de chaque majoration –, on majore $e\big(\pm\frac{\overline{b}r}{k}\big)$ par 1, alors que pour $\Delta_0\big(x,\frac{h}{k}\big)$, on majorait $K_{\pm\overline{h},k}(l,m,n)$ par $k^{\frac{1}{2}}\tau_3(k)(k,r)^{\frac{1}{2}}$.
Finalement, on aboutit à la formule de Voronoï tronquée suivante:

$$\Phi\Big(x,\frac{b}{k}\Big) = \frac{kx^{\frac{1}{3}}\sqrt{3}}{12\pi}\sum_{r\leq N}\frac{\tau_3(r)}{r^{\frac{2}{3}}}\cos\Big(\frac{6\pi(rx)^{\frac{1}{3}}}{k}\Big)\Big[e\Big(\frac{\overline{b}r}{k}\Big)+e\Big(-\frac{\overline{b}r}{k}\Big)\Big]$$

$$+\frac{ikx^{\frac{1}{3}}\sqrt{3}}{12\pi}\sum_{r\leq N}\frac{\tau_3(r)}{r^{\frac{2}{3}}}\sin\Big(\frac{6\pi(rx)^{\frac{1}{3}}}{k}\Big)\Big[e\Big(\frac{\overline{b}r}{k}\Big)-e\Big(-\frac{\overline{b}r}{k}\Big)\Big]$$

$$+\mathcal{O}_\varepsilon\big(k^{\frac{3}{2}}x^{\frac{2}{3}+\varepsilon}N^{-\frac{1}{3}}\big),\tag{147}$$

valable pour $1\leq N\ll x$, qui permet d'obtenir la majoration suivante:

$$\Phi\Big(x,\frac{b}{k}\Big)\ll_\varepsilon x^{\frac{1}{2}+\varepsilon}k^{\frac{5}{4}}.\tag{148}$$

– De même que la formule tronquée pour $\Phi_0\big(x,\frac{h}{k}\big)$ est analogue à celle de $\Delta_0\big(x,\frac{h}{k}\big)$, on obtient, en procédant exactement comme dans les paragraphes précédents la formule de Voronoï suivante:

$$\Phi_a\Big(x,\frac{b}{k}\Big)=\frac{k^2x^a}{2\pi^3}\sum_{r=1}^{+\infty}\frac{\tau_3(r)}{r}I_a\Big(\frac{8\pi^3xr}{k^3}\Big)\Big[e\Big(\frac{\overline{b}r}{k}\Big)+e\Big(-\frac{\overline{b}r}{k}\Big)\Big]$$

$$+\frac{ik^2x^a}{2\pi^3}\sum_{r=1}^{+\infty}\frac{\tau_3(r)}{r}J_a\Big(\frac{8\pi^3xr}{k^3}\Big)\Big[e\Big(\frac{\overline{b}r}{k}\Big)-e\Big(-\frac{\overline{b}r}{k}\Big)\Big],\tag{149}$$

à condition de supposer $a>1$.

– Enfin, de manière analogue au cas de $\Delta_a\big(x,\frac{h}{k}\big)$, le résidu de $F\big(s,\frac{b}{k}\big)\frac{x^{s+a}\Gamma(s)}{\Gamma(s+a+1)}$ en $s=1$ est de la forme:

$$\frac{x^{a+1}}{\sqrt{k}}Q_{k,a}(\log x),$$

où $Q_{k,a}$ est un polynôme de degré 2 dont les coefficients sont $\ll_{\varepsilon,a}k^\varepsilon$.

b) Majoration de $\Phi_1(x,\frac{b}{k})$

– La formule (149) obtenue précédemment donne immédiatement, en utilisant le développement asymptotique de $I_{1+\varepsilon}$ et $J_{1+\varepsilon}$:

$$\Phi_{1+\varepsilon}\Big(x,\frac{b}{k}\Big)\ll_\varepsilon x^{1+\varepsilon}k^2,\tag{150}$$

ceci pour tout $\varepsilon>0$. On va en déduire une majoration similaire pour $\Phi_1\big(x,\frac{b}{k}\big)$.

– Posons, pour $\Re e(x)>0$ et $\Re e(y)>0$:

$$B(x,y):=\int_0^1u^{x-1}(1-u)^{y-1}du.$$

On sait que cette fonction (dite fonction bêta d'Euler) est liée à la fonction gamma d'Euler par la relation:

$$B(x,y)=\frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}.\tag{151}$$

Par conséquent, en revenant à la définition de $\Phi_1\big(x,\frac{b}{k}\big)$, on a:

$$\Phi_1\Big(x,\frac{b}{k}\Big)=\frac{1}{2i\pi}\int_{\mathcal{C}_b}\frac{\Gamma(s)x^{s+1}}{\Gamma(s+2)}E\Big(x,\frac{h}{k}\Big)ds$$

$$=\frac{1}{2i\pi}\int_{\mathcal{C}_b}\frac{x^{s+\varepsilon}\Gamma(s)}{\Gamma(s+2+\varepsilon)}E\Big(s,\frac{h}{k}\Big)\frac{(s+1+\varepsilon)B(s+1+\varepsilon,1-\varepsilon)}{\Gamma(1-\varepsilon)x^\varepsilon}ds$$

$$= \frac{x^{1-\varepsilon}}{\Gamma(1-\varepsilon)} \frac{1}{2i\pi} \int_{\mathcal{C}_b} \frac{(s+1+\varepsilon)x^{s+\varepsilon}\Gamma(s)}{\Gamma(s+2+\varepsilon)} E\Big(s,\frac{h}{k}\Big) ds \int_0^1 u^{s+\varepsilon}(1-u)^{-\varepsilon} du$$

$$= \frac{x^{\varepsilon}}{\Gamma(1-\varepsilon)} \int_0^1 (1-u)^{-\varepsilon} du \frac{x}{2i\pi} \int_{\mathcal{C}_b} \frac{(s+1+\varepsilon)(ux)^{s+\varepsilon}\Gamma(s)}{\Gamma(s+2+\varepsilon)} E\Big(s,\frac{h}{k}\Big) ds$$

$$= \frac{x^{\varepsilon}}{\Gamma(1-\varepsilon)} \int_0^1 (1-u)^{-\varepsilon} \frac{d}{du} \Phi_{1+\varepsilon}\Big(xu,\frac{h}{k}\Big) du,$$

c'est-à-dire, en intégrant par parties:

$$\Phi_1\Big(x,\frac{b}{k}\Big) = \frac{\varepsilon x^{-\varepsilon}}{\Gamma(1-\varepsilon)} \int_0^1 \frac{du}{(1-u)^{1-\varepsilon}} \Phi_{1+\varepsilon}\Big(xu,\frac{h}{k}\Big).$$

– En utilisant la majoration (150), on en déduit:

$$\Phi_1\Big(x,\frac{b}{k}\Big) \ll_{\varepsilon} x^{1+\varepsilon}k^2, \tag{152}$$

c) Une formule de sommation par parties

Lemme 3. *Pour $f \in C^2([a,b])$, où $0 < a < b$, on a:*

$$\sum_{a\le n\le b}{}' f(n) \sum_{\alpha\beta\gamma=n} K_{h,k}(\alpha,\beta,\gamma) = \Big[\Phi_0\Big(t,\frac{h}{k}\Big)f(t) - \Phi_1\Big(t,\frac{h}{k}\Big)f'(t)\Big]_a^b$$

$$+ \int_a^b \Phi_1\Big(t,\frac{h}{k}\Big)f''(t)dt + \frac{1}{\sqrt{k}} \int_a^b (Q_{k,0} + Q'_{k,0})(\log t)f(t)dt. \tag{153}$$

Preuve : On fait une intégration par parties:

$$\sum_{a<n<b}{}' f(n) \sum_{\alpha\beta\gamma=n} K_{h,k}(\alpha,\beta,\gamma) = \Big[M_0\Big(t,\frac{h}{k}\Big)f(t)\Big]_a^b - \int_a^b M_0\Big(t,\frac{h}{k}\Big)f'(t)dt$$

$$= \Big[\Phi_0\Big(t,\frac{h}{k}\Big)f(t)\Big]_a^b + \Big[\frac{t}{\sqrt{k}}Q_{k,0}(\log t)f(t) + F\Big(0,\frac{h}{k}\Big)f(t)\Big]_a^b$$

$$- \int_a^b \Big[\frac{t}{\sqrt{k}}Q_{k,0}(\log t)f'(t) + F\Big(0,\frac{h}{k}\Big)f'(t)\Big]dt - \int_a^b \Phi_0\Big(t,\frac{h}{k}\Big)f'(t)dt$$

$$= \Big[\Phi_0\Big(t,\frac{h}{k}\Big)f(t)\Big]_a^b + \int_a^b f(t)\frac{d}{dt}\Big(\frac{tQ_{k,0}(\log t)}{\sqrt{k}}\Big)dt$$

$$- \Big[\Phi_1\Big(t,\frac{h}{k}f'(t)\Big]_a^b + \int_a^b \Phi_1\Big(t,\frac{h}{k}\Big)f''(t)dt,$$

d'où le résultat.

d) Application au cas $a = \varepsilon$

Compte tenu des développements asymptotiques

$$I_{\varepsilon}(X) = e_{0,\varepsilon}X^{\frac{1-\varepsilon}{3}} \cos\Big(3X^{\frac{1}{3}} - \frac{\varepsilon\pi}{2}\Big) + \mathcal{O}\big(X^{-\frac{\varepsilon}{3}}\big) \tag{154}$$

et

$$J_{\varepsilon}(X) = e'_{0,\varepsilon}X^{\frac{1-\varepsilon}{3}} \sin\Big(3X^{\frac{1}{3}} - \frac{\varepsilon\pi}{2}\Big) + \mathcal{O}\big(X^{-\frac{\varepsilon}{3}}\big), \tag{155}$$

pour montrer la convergence uniforme de (134) pour $x \in [x_1,x_2] \subset]0,+\infty[$, il suffit de montrer la convergence uniforme de:

$$\sum_{r=1}^{+\infty} \frac{1}{r^{\frac{2}{3}+\frac{\varepsilon}{3}}} \cos\Big(\frac{6\pi x^{\frac{1}{3}} r^{\frac{1}{3}}}{k} - \frac{\varepsilon\pi}{2}\Big) \sum_{lmn=r} K_{\pm\overline{h},k}(l,m,n)$$

et de:

$$\sum_{r=1}^{+\infty} \frac{1}{r^{\frac{2}{3}+\frac{\varepsilon}{3}}} \cos\Big(\frac{6\pi x^{\frac{1}{3}} r^{\frac{1}{3}}}{k} - \frac{\varepsilon\pi}{2}\Big) \sum_{lmn=r} K_{\pm\overline{h},k}(l,m,n),$$

donc finalement de:

$$\sum_{r=1}^{+\infty} \frac{1}{r^{\frac{2}{3}+\frac{\varepsilon}{3}}} e\Big(\pm\frac{3}{k}(rx)^{\frac{1}{3}}\Big) \sum_{lmn=r} K_{b,k}(l,m,n),$$

lorsque b et k sont premiers entre eux.

En appliquant le lemme 3, avec $f(t) = t^{-\frac{2+\varepsilon}{3}} e\big(\pm\frac{3}{k}(tx)^{\frac{1}{3}}\big)$, $a=1$ et $b=R$, on obtient:

$$\sum_{r=1}^{+\infty} \frac{1}{r^{\frac{2}{3}+\frac{\varepsilon}{3}}} e\Big(\pm\frac{3}{k}(rx)^{\frac{1}{3}}\Big) \sum_{lmn=r} K_{b,k}(l,m,n)$$

$$= \Big[\Phi_0\Big(t,\frac{b}{k}\Big)\frac{1}{t^{\frac{2+\varepsilon}{3}}} e\Big(\pm\frac{3}{k}(tx)^{\frac{1}{3}}\Big)\Big]_1^R - \Big[\Phi_1\Big(t,\frac{b}{k}\Big)e\Big(\pm\frac{3}{k}(tx)^{\frac{1}{3}}\Big)\Big(\pm\frac{2\pi x^{\frac{1}{3}}}{kt^{\frac{4}{3}+\frac{\varepsilon}{3}}} - \frac{2+\varepsilon}{3t^{\frac{5}{3}+\frac{\varepsilon}{3}}}\Big)\Big]_1^R$$

$$+\int_1^R \Phi_1\Big(t,\frac{b}{k}\Big)e\Big(\pm\frac{3}{k}(tx)^{\frac{1}{3}}\Big)\Big(\frac{4\pi^2 x^{\frac{2}{3}}}{k^2 t^{2+\frac{\varepsilon}{3}}} \mp \frac{4\pi(3+2\varepsilon)}{3kt^{\frac{7}{3}+\frac{\varepsilon}{3}}} + \frac{(2+\varepsilon)(5+\varepsilon)}{9t^{\frac{8}{3}+\frac{\varepsilon}{3}}}\Big)dt$$

$$+\frac{1}{\sqrt{k}}\int_1^R \frac{dt}{t^{\frac{2+\varepsilon}{3}}}(Q_k+Q_k')(\log t)e\Big(\pm\frac{3}{k}(tx)^{\frac{1}{3}}\Big),$$

où on a posé $Q_k := Q_{k,0}$.

– En tenant compte des majorations

$$\Phi_0\Big(t,\frac{b}{k}\Big) \ll_\varepsilon t^{\frac{1}{2}+\varepsilon}k^{\frac{5}{4}} \tag{156}$$

$$\Phi_1\Big(t,\frac{b}{k}\Big) \ll_\varepsilon t^{1+\varepsilon}k^2, \tag{157}$$

on voit que dans les termes intégrés, on peut faire tendre R vers $+\infty$, ceci uniformément en $x \in [x_1,x_2] \subset]0,+\infty[$. De même dans l'intégrale

$$\int_1^R \Phi_1\Big(t,\frac{b}{k}\Big)e\Big(\pm\frac{3}{k}(tx)^{\frac{1}{3}}\Big)\Big(\frac{4\pi^2 x^{\frac{2}{3}}}{k^2 t^{2+\frac{\varepsilon}{3}}} \mp \frac{4\pi(3+2\varepsilon)}{3kt^{\frac{7}{3}+\frac{\varepsilon}{3}}} + \frac{(2+\varepsilon)(5+\varepsilon)}{9t^{\frac{8}{3}+\frac{\varepsilon}{3}}}\Big)dt.$$

– Enfin, pour le terme en

$$\int_1^R \frac{dt}{t^{\frac{2+\varepsilon}{3}}}(Q_k+Q_k')(\log t)e\Big(\pm\frac{3}{k}(tx)^{\frac{1}{3}}\Big),$$

on utilise le résultat suivant, qui est classique:

Lemme 4. *Soient F et G deux fonctions réelles telles que $\frac{G}{F'}$ soit monotone et:*

$$\frac{F'}{G} \geq m > 0 \qquad ou \qquad \frac{F'}{G} \leq -m < 0$$

Alors on a:

$$\Big|\int_a^b G(x)e^{iF(x)}dx\Big| \leq \frac{4}{m}. \tag{158}$$

On prend $F(t) = \pm\frac{6\pi}{k}(tx)^{\frac{1}{3}}$ et $G(t) = (Q_k + Q'_k)(\log t)$. Comme $F'(t) = \pm\frac{2\pi x^{\frac{1}{3}}}{kt^{\frac{2}{3}}}$, on dispose de la minoration:

$$\frac{F'}{G} \gg_{k,\varepsilon} \frac{x^{\frac{1}{3}}}{t^{\frac{2}{3}}(\log t)^2},$$

car Q_k est un polynôme du second degré. Par ailleurs, pour t assez grand, $\frac{G}{F'}$ est monotone, donc:

$$\int_1^R \big(Q_k + Q'_k\big)(\log t)e\Big(\pm\frac{3}{k}(tx)^{\frac{1}{3}}\Big)dt \ll_{k,\varepsilon} \frac{(\log t)^2 t^{\frac{2}{3}}}{x^{\frac{1}{3}}}.$$

Une intégration par parties donne alors:

$$\int_1^R \frac{dt}{t^{\frac{2+\varepsilon}{3}}}\big(Q_k + Q'_k\big)(\log t)e\Big(\pm\frac{3}{k}(tx)^{\frac{1}{3}}\Big) \ll_{k,\varepsilon} \frac{1}{x^{\frac{1}{3}}},$$

ce qui montre encore que l'on peut faire tendre R vers $+\infty$, ceci uniformément en $x \in [x_1,x_2] \subset]0,+\infty[$.

– Les séries apparaissant dans (134) étant uniformément convergentes, on peut finalement affirmer, comme $\Delta_\varepsilon\big(x,\frac{h}{k}\big) = \frac{d}{dx}\Delta_{1+\varepsilon}\big(x,\frac{h}{k}\big)$, que pour tout $x > 0$:

$$\Delta_\varepsilon\Big(x,\frac{h}{k}\Big) = \frac{kx^\varepsilon}{2\pi^3}\sum_{r=1}^{+\infty}\frac{1}{r}I_\varepsilon\Big(\frac{8\pi^3xr}{k^3}\Big)\sum_{lmn=r}\big(K_{-\overline{h},k} + K_{\overline{h},k}\big)(l,m,n)$$

$$+\frac{ikx^\varepsilon}{2\pi^3}\sum_{r=1}^{+\infty}\frac{1}{r}J_\varepsilon\Big(\frac{8\pi^3xr}{k^3}\Big)\sum_{lmn=r}\big(K_{-\overline{h},k} - K_{\overline{h},k}\big)(l,m,n), \tag{159}$$

ce qui termine l'étude du cas $a = \varepsilon$.

4. Autre expression de la formule de Voronoï

En appliquant le lemme 3 aux séries intervenant dans l'expression de $\Delta_\varepsilon\big(x,\frac{h}{k}\big)$, on trouve, avec $a = 1$, $b = +\infty$, et $f(t) = \frac{1}{t}I_\varepsilon\big(\frac{8\pi^3xt}{k^3}\big)$ ou $f(t) = \frac{1}{t}J_\varepsilon\big(\frac{8\pi^3xt}{k^3}\big)$:

$$\Delta_\varepsilon\Big(x,\frac{h}{k}\Big) = \frac{kx^\varepsilon}{2\pi^3}\Big\{\int_1^{+\infty}\frac{d^2}{du^2}\Big[\frac{1}{u}I_\varepsilon\Big(\frac{8\pi^3xu}{k^3}\Big)\Big]\Big[\Phi_1\Big(u,\frac{-\overline{h}}{k}\Big) + \Phi_1\Big(u,\frac{\overline{h}}{k}\Big)\Big]du$$

$$+i\int_1^{+\infty}\frac{d^2}{du^2}\Big[\frac{1}{u}J_\varepsilon\Big(\frac{8\pi^3xu}{k^3}\Big)\Big]\Big[\Phi_1\Big(u,\frac{-\overline{h}}{k}\Big) - \Phi_1\Big(u,\frac{\overline{h}}{k}\Big)\Big]du$$

$$+\frac{2}{\sqrt{k}}\int_1^{+\infty}\big(Q_{k,0} + Q'_{k,0}\big)(\log u)\frac{du}{u}I_\varepsilon\Big(\frac{8\pi^3xu}{k^3}\Big).$$

Sachant que:

$$\Phi_1\Big(u,\pm\frac{\overline{h}}{k}\Big) = \frac{k^2u}{2\pi^3}\sum_{r=1}^{+\infty}\frac{\tau_3(r)}{r}I_1\Big(\frac{8\pi^3ur}{k^3}\Big)\Big[e\Big(\frac{\pm hr}{k}\Big) + e\Big(\frac{\mp hr}{k}\Big)\Big]$$

$$+\frac{ik^2u}{2\pi^3}\sum_{r=1}^{+\infty}\frac{\tau_3(r)}{r}J_1\Big(\frac{8\pi^3ur}{k^3}\Big)\Big[e\Big(\frac{\pm hr}{k}\Big) - e\Big(\frac{\mp hr}{k}\Big)\Big],$$

on peut encore écrire, pour tout $x > 0$:

$$\Delta_\varepsilon\Big(x,\frac{h}{k}\Big) = \frac{k^3x^\varepsilon}{2\pi^6}\sum_{r=1}^{+\infty}\frac{\tau_3(r)}{r}e\Big(\frac{hr}{k}\Big)\int_1^{+\infty}(I_1+J_1)\Big(\frac{8\pi^3ur}{k^3}\Big)\frac{d^2}{du^2}\Big(\frac{1}{u}I_\varepsilon\Big(\frac{8\pi^3xu}{k^3}\Big)\Big)udu$$

$$+\frac{k^3x^\varepsilon}{2\pi^6}\sum_{r=1}^{+\infty}\frac{\tau_3(r)}{r}e\Big(\frac{-hr}{k}\Big)\int_1^{+\infty}(I_1-J_1)\Big(\frac{8\pi^3ur}{k^3}\Big)\frac{d^2}{du^2}\Big(\frac{1}{u}J_\varepsilon\Big(\frac{8\pi^3xu}{k^3}\Big)\Big)udu$$

$$+\frac{2}{\sqrt{k}}\int_1^{+\infty}(Q_k+Q_k')(\log u)\frac{du}{u}I_\varepsilon\Big(\frac{8\pi^3xu}{k^3}\Big). \tag{160}$$

On obtient ainsi une formule de Voronoï pour D_ε, où n'apparaissent plus les sommes de Kloosterman. La forme de cette expression étant semblable à celle obtenue par Jutila pour τ_2, on peut espérer généraliser tout ce qui précède à τ_l, où l est un entier naturel quelconque.

5. Les «petites valeurs» de k pour $\Delta_0(x,\frac{h}{k})$

a) Position du problème

Comme on l'a vu dans le chapitre précédent, la formule de Voronoï tronquée permet d'obtenir pour $k \ll x^{\frac{2}{3}}$ la majoration suivante:

$$\Delta_0\Big(x,\frac{h}{k}\Big) \ll_\varepsilon x^{\frac{1}{2}+\varepsilon}k^{\frac{3}{4}}. \tag{161}$$

Comme me l'a signalé G. Tenenbaum, on peut – par une méthode faisant intervenir une majoration en moyenne des puissances quatrièmes de fonctions L de Dirichlet – obtenir une majoration meilleure:

$$\Delta_0\Big(x,\frac{h}{k}\Big) \ll_\varepsilon x^{\frac{1}{2}+\varepsilon}k^{\frac{1}{2}}, \tag{162}$$

ceci uniformément pour $k \ll x$. L'idée est de se ramener par la formule de Perron à une somme du type

$$\int_{-T}^{T}\sum_{\chi \bmod k}{}^*|L(s,\chi)|^3\frac{dt}{1+|t|}$$

qui est alors majorée grâce au résultat suivant (voir [9]):

Théorème B. (Montgomery) *Si $T \geq 2$ et $q \geq 1$, alors:*

$$\sum_{\chi \bmod q}{}^*\int_{-T}^{T}|L(\sigma+it,\chi)|^4dt \ll \varphi(q)T(\log qT)^4,$$

à condition d'avoir $\frac{1}{2}-(\log qT)^{-1} \leq \sigma \leq \frac{1}{2}+(\log qT)^{-1}$.

Néanmoins, nous allons trouver, toujours en partant de la formule de Voronoï tronquée, et en affinant un peu la méthode, la majoration suivante, pour $k \leq x^{\frac{13}{63}}$:

$$\Delta_0\Big(x,\frac{h}{k}\Big) \ll_\varepsilon x^{\frac{37}{75}+\varepsilon}k^{\frac{21}{25}}. \tag{163}$$

qui reste meilleure que (162) tant que $k \ll x^{\frac{1}{51}}$.

b) Utilisation de la méthode de Van der Corput

Pour $k \ll x^{\frac{2}{3}}$, on sait que:

$$\Delta_0\Big(x,\frac{h}{k}\Big) = \frac{x^{\frac{1}{3}}\sqrt{3}}{12\pi}\sum_{r\leq R}\frac{1}{r^{\frac{2}{3}}}\cos\Big(\frac{6\pi(rx)^{\frac{1}{3}}}{k}\Big)\sum_{lmn=r}\big(K_{\overline{h},k}+K_{-\overline{h},k}\big)(l,m,n)$$

$$+\frac{ix^{\frac{1}{3}}\sqrt{3}}{12\pi}\sum_{r\leq R}\frac{1}{r^{\frac{2}{3}}}\sin\Big(\frac{6\pi(rx)^{\frac{1}{3}}}{k}\Big)\sum_{lmn=r}\big(K_{\overline{h},k}+K_{-\overline{h},k}\big)(l,m,n)$$

$$+\mathcal{O}_\varepsilon\big(kx^{\frac{2}{3}+\varepsilon}R^{-\frac{1}{3}}\big).$$

– Pour majorer les sommes $\sum_{r\leq R}$, une sommation par parties, ainsi que le fait que $K_{\pm\overline{h},k}(l,m,n)$ est réel, permettent de se ramener à l'étude de:

$$B_\pm := \sum_{r\leq R} e\Big(\frac{3}{k}(rx)^{\frac{1}{3}}\Big)\sum_{lmn=r}K_{\pm\overline{h},k}(l,m,n)$$

$$= \sum_{lmn\leq R} e\Big(\frac{3}{k}(lmnx)^{\frac{1}{3}}\Big)K_{\pm\overline{h},k}(l,m,n).$$

– On pose:

$$a_{l,m,n} := e\Big(\frac{3}{k}(lmnx)^{\frac{1}{3}}\Big)K_{\pm\overline{h},k}(l,m,n), \tag{164}$$

qui est symétrique en l, m, n. Or on dispose de l'identité suivante, qui est une variante du principe de l'hyperbole de Dirichlet:

$$\sum_{lmn<R}a_{l,m,n} = 6S_1 - 3S_2 - 3S_3 + 3S_4, \tag{165}$$

avec:

$$S_1 := \sum_{l<R^{\frac{1}{3}}}\sum_{m<\sqrt{\frac{R}{l}}}\sum_{n<\frac{R}{lm}}a_{l,m,n} \tag{166}$$

$$S_2 := \sum_{l<R^{\frac{1}{3}}}\sum_{m<\sqrt{\frac{R}{l}}}\sum_{n<\sqrt{\frac{R}{l}}}a_{l,m,n} \tag{167}$$

$$S_3 := \sum_{l<R^{\frac{1}{3}}}\sum_{m<R^{\frac{1}{3}}}\sum_{n<\frac{R}{lm}}a_{l,m,n} \tag{168}$$

$$S_4 := \sum_{l<R^{\frac{1}{3}}}\sum_{m<R^{\frac{1}{3}}}\sum_{n<R^{\frac{1}{3}}}a_{l,m,n}. \tag{169}$$

– Comme $K_{\pm\overline{h},k}(l,m,n)$ ne dépend que de la classe de l, m et n modulo k, on peut écrire:

$$S_1 = \sum_{\alpha,\beta,\gamma=1}^{k}K_{\pm\overline{h},k}(\alpha,\beta,\gamma)\sum_{\substack{l<R^{\frac{1}{3}}\\ l\equiv\alpha \bmod k}}\sum_{\substack{m<\sqrt{\frac{R}{l}}\\ m\equiv\beta \bmod k}}\sum_{\substack{n<\frac{R}{lm}\\ n\equiv\gamma \bmod k}}e\Big(\frac{3}{k}(lmnx)^{\frac{1}{3}}\Big).$$

Posons:

$$T := \sum_{\substack{n<\frac{R}{lm}\\ n\equiv\gamma \bmod k}}e\Big(\frac{3}{k}(lmnx)^{\frac{1}{3}}\Big).$$

On a:

$$T = \sum_{u<\frac{1}{k}\left(\frac{R}{lm}-\gamma\right)} e\Big(\frac{3}{k}(lmx)^{\frac{1}{3}}(\gamma+ku)^{\frac{1}{3}}\Big)$$

$$= \sum_{u<\frac{1}{k}\left(\frac{R}{lm}-\gamma\right)} e\Big(3\Big(\frac{lmx}{k^2}\Big)^{\frac{1}{3}}\Big(u+\frac{\gamma}{k}\Big)^{\frac{1}{3}}\Big).$$

On applique alors le théorème suivant, dû à Van der Corput (cf théorème 5.11 dans [16]):

Théorème C. *Soit F une fonction de classe C^3 à valeurs réelles. On suppose $b-a \geq 1$ et pour tout $\omega \in [a,b]$:*

$$\lambda_3 \leq F'''(w) \leq h\lambda_3 \qquad ou \qquad \lambda_3 \leq -F'''(w) \leq h\lambda_3.$$

Alors:

$$\sum_{a<n\leq b} e\big(F(n)\big) \ll h^{\frac{1}{2}}(b-a)\lambda_3^{\frac{1}{6}} + (b-a)^{\frac{1}{2}}\lambda_3^{-\frac{1}{6}}. \tag{170}$$

En appliquant ceci avec $F(\omega) = 3\big(\frac{lmx}{k^2}\big)^{\frac{1}{3}}\big(\omega+\frac{\gamma}{k}\big)^{\frac{1}{3}}$, après avoir fait un découpage dyadique sur u, on obtient:

$$T \ll \Big(\frac{R}{klm}\Big)^{\frac{31}{42}}\Big(\frac{lmx}{k^2}\Big)^{\frac{1}{42}} + \Big(\frac{R}{klm}\Big)^{\frac{85}{84}}\Big(\frac{lmx}{k^2}\Big)^{-\frac{1}{42}}$$

$$\ll R^{\frac{31}{42}}x^{\frac{1}{42}}(lm)^{-\frac{5}{7}}k^{-\frac{11}{14}} + R^{\frac{85}{84}}x^{-\frac{1}{42}}(lm)^{-\frac{29}{28}}k^{-\frac{27}{28}}.$$

Le calcul est analogue à celui de F.V. Atkinson dans [1].

– En reportant dans S_1, on obtient:

$$S_1 \ll \sum_{\alpha,\beta,\gamma=1}^{k} \big|K_{\pm\overline{h},k}(\alpha,\beta,\gamma)\big|\Big\{R^{\frac{31}{42}}x^{\frac{1}{42}}k^{-\frac{11}{14}} \sum_{\substack{l<R^{\frac{1}{3}}\\ l\equiv\alpha \bmod k}} l^{-\frac{5}{7}} \sum_{\substack{m<\sqrt{\frac{R}{l}}\\ m\equiv\beta \bmod k}} m^{-\frac{5}{7}}$$

$$+R^{\frac{85}{84}}x^{-\frac{1}{42}}k^{-\frac{27}{28}} \sum_{\substack{l<R^{\frac{1}{3}}\\ l\equiv\alpha \bmod k}} l^{-\frac{29}{28}} \sum_{\substack{m<\sqrt{\frac{R}{l}}\\ m\equiv\beta \bmod k}} m^{-\frac{29}{28}}\Big\}.$$

Or on a:

$$\sum_{\substack{m<\sqrt{\frac{R}{l}}\\ m\equiv\beta \bmod k}} m^{-\frac{5}{7}} = \sum_{0\leq m'<\frac{1}{k}\left[\sqrt{\frac{R}{l}}-\beta\right]} (\beta+m'k)^{-\frac{5}{7}} \ll k^{-\frac{5}{7}}\Big(\frac{1}{k}\sqrt{\frac{R}{l}}\Big)^{\frac{2}{7}} + \beta^{-\frac{5}{7}} = \frac{1}{k}\Big(\frac{R}{l}\Big)^{\frac{1}{7}} + \beta^{-\frac{5}{7}}$$

et

$$\sum_{\substack{m<\sqrt{\frac{R}{l}}\\ m\equiv\beta \bmod k}} m^{-\frac{29}{28}} \ll k^{-\frac{29}{28}} + \beta^{-\frac{29}{28}},$$

donc:

$$\sum_{\substack{l<R^{\frac{1}{3}}\\ l\equiv\alpha \bmod k}} l^{-\frac{5}{7}} \sum_{\substack{m<\sqrt{\frac{R}{l}}\\ m\equiv\beta \bmod k}} m^{-\frac{5}{7}} \ll \frac{1}{k}R^{\frac{1}{7}} \sum_{\substack{l<R^{\frac{1}{3}}\\ l\equiv\alpha \bmod k}} l^{-\frac{6}{7}} + \beta^{-\frac{5}{7}} \sum_{\substack{l<R^{\frac{1}{3}}\\ l\equiv\alpha \bmod k}} l^{-\frac{5}{7}}$$

$$\ll \frac{1}{k}R^{\frac{1}{7}} \sum_{l'<\frac{R^{\frac{1}{3}}-\alpha}{k}} (\alpha+l'k)^{-\frac{6}{7}} + \beta^{-\frac{5}{7}} \sum_{l'<\frac{R^{\frac{1}{3}}-\alpha}{k}} (\alpha+l'k)^{-\frac{5}{7}}$$

$$\ll \frac{1}{k^2}R^{\frac{4}{21}} + \frac{1}{k}\alpha^{-\frac{6}{7}}R^{\frac{1}{7}} + \frac{1}{k}\beta^{-\frac{5}{7}}R^{\frac{2}{21}} + (\alpha\beta)^{-\frac{5}{7}},$$

et de la même façon:

$$\sum_{\substack{l<R^{\frac{1}{3}}\\ l\equiv\alpha \bmod k}} l^{-\frac{29}{28}} \sum_{\substack{m<\sqrt{\frac{R}{l}}\\ m\equiv\beta \bmod k}} m^{-\frac{29}{28}} \ll k^{-\frac{29}{14}} + k^{-\frac{29}{28}}\big(\alpha^{-\frac{29}{28}} + \beta^{-\frac{29}{28}}\big) + (\alpha\beta)^{-\frac{29}{28}}.$$

Par conséquent:

$$S_1 \ll \sum_{\alpha,\beta,\gamma}^{k} \big|K_{\pm\overline{h},k}(\alpha,\beta,\gamma)\big|\big\{R^{\frac{31}{42}}x^{\frac{1}{42}}k^{-\frac{11}{14}}(\alpha\beta)^{-\frac{5}{7}} + R^{\frac{35}{42}}x^{\frac{1}{42}}k^{-\frac{25}{14}}\beta^{-\frac{5}{7}} + R^{\frac{37}{42}}x^{\frac{1}{42}}k^{-\frac{25}{14}}\alpha^{-\frac{6}{7}}$$

$$+R^{\frac{13}{14}}x^{\frac{1}{42}}k^{-\frac{39}{14}} + R^{\frac{85}{84}}x^{-\frac{1}{42}}k^{-\frac{27}{28}}(\alpha\beta)^{-\frac{29}{28}} + R^{\frac{85}{84}}x^{-\frac{1}{42}}k^{-2}\alpha^{-\frac{29}{28}} + R^{\frac{85}{84}}x^{-\frac{1}{42}}k^{-\frac{85}{28}}\big\}. \tag{171}$$

– D'après la majoration (64), issue de la majoration de Weil pour les sommes de Kloosterman, on a:

$$\big|K_{\pm\overline{h},k}(\alpha,\beta,\gamma)\big| \leq \tau_3(k)k^{\frac{1}{2}}(k,\alpha\beta\gamma)^{\frac{1}{2}}.$$

Donc:

$$\sum_{\alpha,\beta,\gamma}^{k} \big|K_{\pm\overline{h},k}(\alpha,\beta,\gamma)\big| \leq \tau_3(k)k^{\frac{1}{2}} \sum_{\alpha,\beta,\gamma}^{k} (k,\alpha\beta\gamma)^{\frac{1}{2}} \leq \tau_3(k) \sum_{u<k^3} \tau_3(u)(k,u)^{\frac{1}{2}},$$

ce qui donne, en utilisant le lemme 22 du chapitre 3:

$$\sum_{\alpha,\beta,\gamma}^{k} \big|K_{\pm\overline{h},k}(\alpha,\beta,\gamma)\big| \leq \tau_3(k)\tau(k)k^{\frac{7}{2}}\log^2 k \ll_\varepsilon k^{\frac{7}{2}+\varepsilon}. \tag{172}$$

– Par ailleurs, si on pose $\delta = (k,\alpha\beta)$, on peut écrire:

$$\sum_{\gamma=1}^{k}(k,\alpha\beta\gamma)^{\frac{1}{2}} = \sum_{\delta|d|k} d^{\frac{1}{2}} \sum_{\substack{\gamma=1\\ (k,\alpha\beta\gamma)=d}}^{k} 1 = \sum_{\delta|d|k} d^{\frac{1}{2}} \sum_{\substack{\gamma=1\\ (\frac{k}{\delta},\frac{\alpha\beta}{\delta}\gamma)=\frac{d}{\delta}}}^{k} 1 = \sum_{\delta|d|k} d^{\frac{1}{2}} \sum_{\substack{\gamma'=1\\ (\gamma',\frac{k}{d})=1}}^{\frac{k\delta}{d}} 1$$

$$\leq \sum_{\delta|d|k} \frac{k\delta}{\sqrt{d}} \leq k\delta \sum_{v|\frac{k}{d}} \frac{1}{\sqrt{\delta v}} \ll k\tau(k)(k,\alpha\beta)^{\frac{1}{2}}.$$

Donc:

$$\sum_{\alpha,\beta,\gamma}^{k} \frac{|K_{\pm\overline{h},k}(\alpha,\beta,\gamma)|}{(\alpha\beta)^{\frac{5}{7}}} \ll k^{\frac{1}{2}}\tau_3(k) \sum_{\alpha,\beta,\gamma=1}^{k} \frac{(k,\alpha\beta\gamma)^{\frac{1}{2}}}{(\alpha\beta)^{\frac{5}{7}}}$$

d'après le calcul précédent, d'où:

$$\sum_{\alpha,\beta,\gamma}^{k} \frac{|K_{\pm\overline{h},k}(\alpha,\beta,\gamma)|}{(\alpha\beta)^{\frac{5}{7}}} \ll k^{\frac{3}{2}}\tau(k)\tau_3(k) \sum_{\alpha,\beta=1}^{k} \frac{(k,\alpha\beta)^{\frac{1}{2}}}{(\alpha\beta)^{\frac{5}{7}}} \ll k^{\frac{3}{2}}\tau(k)\tau_3(k) \sum_{u\leq k^2} \frac{(k,u)^{\frac{1}{2}}\tau(u)}{u^{\frac{5}{7}}}.$$

Le lemme 22 du chapitre précédent donne à nouveau:

$$\sum_{\alpha,\beta,\gamma}^{k} \frac{|K_{\pm\overline{h},k}(\alpha,\beta,\gamma)|}{(\alpha\beta)^{\frac{5}{7}}} \ll_\varepsilon k^{\frac{29}{14}+\varepsilon}. \tag{173}$$

– Enfin, on trouve de la même façon:

$$\sum_{\alpha,\beta,\gamma}^{k}\frac{|K_{\pm\overline{h},k}(\alpha,\beta,\gamma)|}{(\alpha\beta)^{\frac{29}{28}}}\ll_{\varepsilon}k^{\frac{3}{2}+\varepsilon},\tag{174}$$

$$\sum_{\alpha,\beta,\gamma}^{k}\frac{|K_{\pm\overline{h},k}(\alpha,\beta,\gamma)|}{\alpha^{\frac{5}{7}}}\ll_{\varepsilon}k^{\frac{39}{14}+\varepsilon},\tag{175}$$

$$\sum_{\alpha,\beta,\gamma}^{k}\frac{|K_{\pm\overline{h},k}(\alpha,\beta,\gamma)|}{\alpha^{\frac{6}{7}}}\ll_{\varepsilon}k^{\frac{37}{14}+\varepsilon},\tag{176}$$

et:

$$\sum_{\alpha,\beta,\gamma}^{k}\frac{|K_{\pm\overline{h},k}(\alpha,\beta,\gamma)|}{\alpha^{\frac{29}{28}}}\ll_{\varepsilon}k^{\frac{5}{2}+\varepsilon},\tag{177}$$

– En reportant les majorations (172) à (177) dans (171), on obtient:

$$S_1\ll_{\varepsilon}\big(R^{\frac{31}{42}}x^{\frac{1}{42}}k^{\frac{9}{7}}+R^{\frac{35}{42}}x^{\frac{1}{42}}k+R^{\frac{37}{42}}x^{\frac{1}{42}}k^{\frac{6}{7}}+R^{\frac{13}{14}}x^{\frac{1}{42}}k^{\frac{5}{7}}+R^{\frac{85}{84}}x^{-\frac{1}{42}}k^{\frac{15}{28}}\big)k^{\varepsilon}.$$

– Les sommes S_2, S_3 et S_4 se majorent exactement de la même manière Finalement on obtient:

$$\Delta_0\Big(x,\frac{h}{k}\Big)\ll_{\varepsilon}\big[x^{\frac{5}{14}}\big(R^{\frac{1}{14}}k^{\frac{9}{7}}+R^{\frac{1}{6}}k+R^{\frac{3}{14}}k^{\frac{6}{7}}+R^{\frac{11}{42}}k^{\frac{5}{7}}\big)+x^{\frac{13}{42}}R^{\frac{29}{84}}k^{\frac{15}{28}}\big]k^{\varepsilon}+kx^{\frac{2}{3}+\varepsilon}R^{-\frac{1}{3}},$$

ce qui conduit à choisir:

$$R=x^{\frac{13}{25}}k^{\frac{12}{25}}$$

d'où:

$$\Delta_0\Big(x,\frac{h}{k}\Big)\ll_{\varepsilon}x^{\frac{37}{75}+\varepsilon}k^{\frac{21}{25}}+x^{\frac{69}{175}+\varepsilon}k^{\frac{33}{25}}.\tag{178}$$

soit, lorsque $k\leq x^{\frac{13}{63}}$:

$$\Delta_0\Big(x,\frac{h}{k}\Big)\ll_{\varepsilon}x^{\frac{37}{75}+\varepsilon}k^{\frac{21}{25}}.$$

6. Cas de τ_3 dans les progressions arithmétiques

a) Formule de Voronoï

On a obtenu dans le paragraphe 3 que pour tout ε:

$$\begin{aligned}D_{\varepsilon}\Big(x,\frac{h}{k}\Big)=\frac{x^{1+\varepsilon}}{k\Gamma(2+\varepsilon)}\Big\{&c_2(k)\log^2x+\Big[c_1(k)-2c_2(k)\Big(\gamma-1+\frac{\Gamma'}{\Gamma}(2+\varepsilon)\Big)\Big]\log x\\&+\Big[c_0(k)-c_1(k)\Big(\gamma-1+\frac{\Gamma'}{\Gamma}(2+\varepsilon)\Big)+2c_2(k)\Big(\frac{\Gamma'^2-\frac{1}{2}\Gamma\Gamma''}{\Gamma^2}(2+\varepsilon)\\&\qquad+(\gamma-1)\frac{\Gamma'}{\Gamma}(2+\varepsilon)+\frac{\Gamma''(1)}{2}-\gamma\Big)\Big]\Big\}\\&+\frac{x^{\varepsilon-2}}{2\Gamma(-1-\varepsilon)}E\Big(-2,\frac{h}{k}\Big)-\frac{x^{-1+\varepsilon}}{\Gamma(-\varepsilon)}E\Big(-1,\frac{h}{k}\Big)+\frac{x^{\varepsilon}}{\Gamma(1-\varepsilon)}E\Big(0,\frac{h}{k}\Big)\\&+\Delta_{\varepsilon}\Big(x,\frac{h}{k}\Big),\end{aligned}$$

avec:

$$\Delta_\varepsilon\Big(x,\frac{h}{k}\Big)=\frac{kx^\varepsilon}{2\pi^3}\sum_{r=1}^{+\infty}\frac{1}{r}I_\varepsilon\Big(\frac{8\pi^3xr}{k^3}\Big)\sum_{lmn=r}\big(K_{-\overline{h},k}+K_{\overline{h},k}\big)(l,m,n)$$

$$+\frac{ikx^\varepsilon}{2\pi^3}\sum_{r=1}^{+\infty}\frac{1}{r}J_\varepsilon\Big(\frac{8\pi^3xr}{k^3}\Big)\sum_{lmn=r}\big(K_{-\overline{h},k}-K_{\overline{h},k}\big)(l,m,n).$$

Nous allons montrer que l'on peut déduire une formule de Voronoï analogue pour la somme définie, pour $(c,k)=1$, par:

$$D_\varepsilon(x;c,k):=\sum_{\substack{n\leq x\\ n\equiv c \bmod k}}{}'\tau_3(n)(x-n)^\varepsilon.$$

– On peut écrire:

$$D_\varepsilon(x;c,k)=\frac{1}{k}\sum_{h=1}^{k}e\Big(\frac{-hc}{k}\Big)\sum_{n\leq x}e\Big(\frac{hn}{k}\Big)\tau_3(n)(x-n)^\varepsilon$$

$$=\frac{1}{k}\sum_{d|k}\sum_{\substack{h=1\\(h,k)=\frac{k}{d}}}^{k}e\Big(\frac{-hc}{k}\Big)\sum_{n\leq x}\tau_3(n)e\Big(\frac{hn}{k}\Big)(x-n)^\varepsilon.$$

Par conséquent, en posant $h=u\frac{k}{d}$, on trouve:

$$D_\varepsilon(x;c,k)=\frac{1}{k}\sum_{d|k}\sum_{\substack{u=1\\(u,d)=1}}^{d}e\Big(\frac{-uc}{d}\Big)\sum_{n\leq x}\tau_3(n)e\Big(\frac{un}{d}\Big)(x-n)^\varepsilon,$$

c'est-à-dire:

$$D_\varepsilon(x;c,k)=\frac{1}{k}\sum_{d|k}\sum_{\substack{u=1\\(u,d)=1}}^{d}e\Big(\frac{-uc}{d}\Big)D_\varepsilon\Big(x,\frac{u}{d}\Big),\tag{179}$$

ce qui permet de relier les progressions arithmétiques aux sommes d'exponentielles.

– Le nouveau terme d'erreur peut donc s'écrire

$$\tilde{\Delta}_\varepsilon(x,c,k)=\frac{1}{k}\sum_{d|k}\sum_{\substack{u=1\\(u,d)=1}}^{d}e\Big(-\frac{uc}{d}\Big)\Delta_\varepsilon\Big(x,\frac{u}{d}\Big)$$

$$=\frac{1}{k}\sum_{d|k}\sum_{\substack{u=1\\(u,d)=1}}^{d}e\Big(-\frac{uc}{d}\Big)\Big\{\frac{dx^\varepsilon}{2\pi^3}\sum_{r=1}^{+\infty}\frac{1}{r}I_\varepsilon\Big(\frac{8\pi^3xr}{d^3}\Big)\sum_{lmn=r}\big(K_{-\overline{u},d}+K_{\overline{u},d}\big)(l,m,n)$$

$$+\frac{idx^\varepsilon}{2\pi^3}\sum_{r=1}^{+\infty}\frac{1}{r}J_\varepsilon\Big(\frac{8\pi^3xr}{d^3}\Big)\sum_{lmn=r}\big(K_{-\overline{u},d}-K_{\overline{u},d}\big)(l,m,n)\Big\}$$

$$=\frac{x^\varepsilon}{2\pi^3k}\sum_{d|k}d\sum_{r=1}^{+\infty}\frac{1}{r}I_\varepsilon\Big(\frac{8\pi^3xr}{d^3}\Big)\sum_{lmn=r}\Big[\sum_{\substack{u=1\\(u,d)=1}}^{d}e\Big(-\frac{uc}{d}\Big)\big(K_{-\overline{u},d}+K_{\overline{u},d}\big)(l,m,n)\Big]$$

$$+\frac{ix^\varepsilon}{2\pi^3k}\sum_{d|k}d\sum_{r=1}^{+\infty}\frac{1}{r}J_\varepsilon\Big(\frac{8\pi^3xr}{d^3}\Big)\sum_{lmn=r}\Big[\sum_{\substack{u=1\\(u,d)=1}}^{d}e\Big(-\frac{uc}{d}\Big)\big(K_{-\overline{u},d}-K_{\overline{u},d}\big)(l,m,n)\Big].\tag{180}$$

– Posons:

$$\mathcal{A}_{\pm}(l,m,n) := \sum_{\substack{h=1\\(h,d)=1}}^{d} e\Big(\frac{-hc}{d}\Big) K_{\pm\overline{h},d}(l,m,n). \tag{181}$$

En revenant à la définition de $K_{\pm\overline{h},d}$, on obtient:

$$\mathcal{A}_{\pm}(l,m,n) = \frac{1}{d}\sum_{\substack{h=1\\(h,d)=1}}^{d}\sum_{t=1}^{d}\sum_{u=1}^{d}\sum_{v=1}^{d} e\Big(\frac{tl+um+vn\mp tuvh-ch}{d}\Big)$$

$$= \frac{1}{d}\sum_{t,u,v=1}^{d} c_d(\mp tuv-c)e\Big(\frac{tl+um+vn}{d}\Big),$$

où $c_d(\mp tuv-c)$ est la somme de Ramanujan classique. Donc:

$$\mathcal{A}_{\pm}(l,m,n) = \frac{1}{d}\sum_{t,u,v=1}^{d}\sum_{\substack{\delta\mid \mp tuv-c\\ \delta\mid d}} \mu\Big(\frac{d}{\delta}\Big)\delta e\Big(\frac{lt+mu+nv}{d}\Big)$$

$$= \frac{1}{d}\sum_{\delta\mid d}\delta\mu\Big(\frac{d}{\delta}\Big)\sum_{\substack{t,u,v=1\\ tuv\equiv\mp c \bmod \delta}}^{d} e\Big(\frac{tl+um+vn}{d}\Big).$$

Ecrivons maintenant:

$$\begin{cases} t = \delta t_1 + t_2\\ u = \delta u_1 + u_2\\ v = \delta v_1 + v_2 \end{cases}$$

ce qui donne:

$$\mathcal{A}_{\pm}(l,m,n) = \frac{1}{d}\sum_{\delta\mid d}\delta\mu\Big(\frac{d}{\delta}\Big)\sum_{t_1,u_1,v_1=1}^{\frac{d}{\delta}}\sum_{\substack{t_2,u_2,v_2=1\\ t_2u_2v_2\equiv\mp c \bmod \delta}}^{\delta} e\Big(\frac{l\delta t_1+m\delta u_1+n\delta v_1}{d}\Big)e\Big(\frac{lt_2+mu_2+nv_2}{d}\Big).$$

Le terme général est non nul à condition de supposer $\frac{d}{\delta}|l$, $\frac{d}{\delta}|m$ et $\frac{d}{\delta}|n$. Donc:

$$\mathcal{A}_{\pm}(l,m,n) = \frac{1}{d}\sum_{\substack{\delta\mid d\\ \frac{d}{\delta}\mid(l,m,n)}} \delta\Big(\frac{d}{\delta}\Big)^3\mu\Big(\frac{d}{\delta}\Big)S_3\Big(\frac{\delta l}{d},\frac{\delta m}{d},\frac{\delta n}{d};\mp c,\delta\Big)$$

$$\mathcal{A}_{\pm}(l,m,n) = d^2\sum_{\substack{\delta\mid d\\ \frac{d}{\delta}\mid(l,m,n)}} \frac{1}{\delta^2}\mu\Big(\frac{d}{\delta}\Big)S_3\Big(\frac{l\delta}{d},\frac{m\delta}{d},\frac{n\delta}{d};\mp c,\delta\Big), \tag{182}$$

où

$$S_3(\alpha,\beta,\gamma;\mp c,\delta) = \sum_{\substack{t,u,v=1\\ tuv\equiv\mp c \bmod \delta}} e\Big(\frac{\alpha t+\beta u+\gamma v}{\delta}\Big) \tag{183}$$

est une somme de Kloosterman généralisée en dimension 3.

– En reportant l'expression de $\mathcal{A}_{\pm}(l,m,n)$ dans le terme d'erreur, on obtient:

$$\tilde{\Delta}_{\varepsilon}(x;c,k) = \frac{x^{\varepsilon}}{2\pi^3 k}\sum_{d\mid k} d\sum_{r=1}^{+\infty}\frac{1}{r}I_{\varepsilon}\Big(\frac{8\pi^3 xr}{d^3}\Big)\sum_{lmn=r}\big(\mathcal{A}_{-}+\mathcal{A}_{+}\big)(l,m,n)$$

$$+\frac{ix^{\varepsilon}}{2\pi^3 k}\sum_{d\mid k} d\sum_{r=1}^{+\infty}\frac{1}{r}J_{\varepsilon}\Big(\frac{8\pi^3 xr}{d^3}\Big)\sum_{lmn=r}\big(\mathcal{A}_{-}-\mathcal{A}_{+}\big)(l,m,n). \tag{184}$$

Posons

$$A_\pm := \frac{x^\varepsilon}{2\pi^3 k}\sum_{d|k} d\sum_{r=1}^{+\infty}\frac{1}{r}I_\varepsilon\Big(\frac{8\pi^3 xr}{d^3}\Big)\sum_{lmn=r}\mathcal{A}_\pm(l,m,n). \tag{185}$$

En posant $l' := \frac{l\delta}{d}$, $m' := \frac{m\delta}{d}$ et $n' := \frac{n\delta}{d}$, on obtient:

$$A_\pm = \frac{x^\varepsilon}{2\pi^3 k}\sum_{d|k} d^3\sum_{r=1}^{+\infty}\frac{1}{r}I_\varepsilon\Big(\frac{8\pi^3 xr}{d^3}\Big)\sum_{lmn=r}\sum_{\substack{\delta|d\\ \frac{d}{\delta}|(l,m,n)}}\frac{1}{\delta^2}\mu\Big(\frac{d}{\delta}\Big)S_3\Big(\frac{l\delta}{d},\frac{m\delta}{d},\frac{n\delta}{d};\mp c,\delta\Big)$$

$$= \frac{x^\varepsilon}{2\pi^3 k}\sum_{d|k} d^3\sum_{\delta|d}\frac{1}{\delta^2}\mu\Big(\frac{d}{\delta}\Big)\sum_{\substack{r=1\\ (\frac{d}{\delta})^3|r}}^{+\infty}\frac{1}{r}I_\varepsilon\Big(\frac{8\pi^3 xr}{d^3}\Big)\sum_{l'm'n'=\frac{r\delta^3}{d^3}} S_3(l',m',n';\mp c,\delta)$$

$$= \frac{x^\varepsilon}{2\pi^3 k}\sum_{d|k} d^3\sum_{\delta|d}\frac{1}{\delta^2}\mu\Big(\frac{d}{\delta}\Big)\sum_{r'=1}^{+\infty}\frac{\delta^3}{r'd^3}I_\varepsilon\Big(\frac{8\pi^3 xr'}{\delta^3}\Big)\sum_{l'm'n'=r'} S_3(l',m',n';\mp c,\delta),$$

avec $r' := \frac{r\delta^3}{d^3}$. D'où, en changeant r' en r, l' en l, m' en m et n' en n:

$$A_\pm = \frac{x^\varepsilon}{2\pi^3 k}\sum_{\delta|k}\delta\sum_{r=1}^{+\infty}\frac{1}{r}I_\varepsilon\Big(\frac{8\pi^3 xr}{\delta^3}\Big)\Big[\sum_{lmn=r} S_3(l,m,n;\mp c,\delta)\Big]\underbrace{\sum_{\substack{d|k\\ \delta|d}}\mu\Big(\frac{d}{\delta}\Big)}_{\eta(\frac{k}{\delta})}.$$

On obtient finalement, en rassemblant tous les résultats précédents:

$$\tilde{\Delta}_\varepsilon(x;c,k) = \frac{x^\varepsilon}{2\pi^3}\sum_{r=1}^{+\infty}\frac{1}{r}I_\varepsilon\Big(\frac{8\pi^3 xr}{k^3}\Big)\sum_{lmn=r}\big(S_3(l,m,n;c,k)+S_3(l,m,n;-c,k)\big)$$

$$+\frac{ix^\varepsilon}{2\pi^3}\sum_{r=1}^{+\infty}\frac{1}{r}J_\varepsilon\Big(\frac{8\pi^3 xr}{k^3}\Big)\sum_{lmn=r}\big(S_3(l,m,n;c,k)-S_3(l,m,n;-c,k)\big), \tag{186}$$

où les S_3 sont des sommes de Kloosterman généralisées (en dimension 3).

b) Majoration de $\tilde{\Delta}_0(x;c,k)$

De la même façon que pour $\Delta_0\big(x,\frac{h}{k}\big)$, on peut obtenir une formule de Voronoï tronquée pour τ_3 dans les progressions arithmétiques. Comme dans le paragraphe précédent, la seule différence est que l'on a $S_3(l,m,n;\pm c,k)$ au lieu de $kK_{\pm\overline{h},k}(l,m,n)$, si bien que l'on trouve, pour $x \geq 1$, $k \ll x$ et $1 \leq N \ll x$ et c premier avec k:

$$\tilde{\Delta}_0(x;c,k) = \frac{x^{\frac{1}{3}}\sqrt{3}}{12\pi k}\sum_{r\leq N}\frac{1}{r^{\frac{2}{3}}}\cos\Big(\frac{6\pi(rx)^{\frac{1}{3}}}{k}\Big)\sum_{lmn=r}\big(S_3(l,m,n;-c,k)+S_3(l,m,n;c,k)\big)$$

$$+\frac{x^{\frac{1}{3}}\sqrt{3}}{12\pi k}\sum_{r\leq N}\frac{1}{r^{\frac{2}{3}}}\sin\Big(\frac{6\pi(rx)^{\frac{1}{3}}}{k}\Big)\sum_{lmn=r}\big(S_3(l,m,n;-c,k)-S_3(l,m,n;c,k)\big)$$

$$+\mathcal{O}_\varepsilon\big(x^{\frac{2}{3}+\varepsilon}N^{-\frac{1}{3}}\big). \tag{187}$$

Les sommes S_3 qui apparaissent ici sont les sommes de Kloosterman généralisées par Mordell en dimension supérieure à 2 (cf [10]). Dans le cas où k est premier, elles ont été majorées par Deligne ([6], voir aussi [11] et [2]) à partir de ses travaux sur les conjectures de Weil ([5]). Le cas général a été traité par R.A. Smith dans [12].

En utilisant ces résultats, on obtient pour $1 \leq N \ll x$:

$$\tilde{\Delta}_0(x;c,k) \ll_\varepsilon \frac{x^{\frac{2}{3}+\varepsilon}}{N^{\frac{1}{3}}} + x^{\frac{1}{3}+\varepsilon} N^{\frac{1}{3}}, \tag{188}$$

ce qui donne finalement, en choisissant $N = x^{\frac{1}{2}}$:

$$\tilde{\Delta}_0(x;c,k) \ll_\varepsilon x^{\frac{1}{2}+\varepsilon}, \tag{189}$$

ceci uniformément pour $1 \leq k \ll x$.

On obtient donc un développement asymptotique de:

$$D(x;c,k) = D_0(x;c,k) = {\sum_{\substack{n \leq x \\ n=c \bmod k}}}' \tau_3(n)$$

valable uniformément pour $k \ll x^{\frac{1}{2}-\varepsilon}$. En effet le terme principal est $\ll \frac{x^{1+\varepsilon}}{k}$ et le résidu en 0, qui s'évalue comme $E\big(0,\frac{h}{k}\big)$, donne une contribution $\ll k$ (on gagne un facteur $k^{\frac{1}{2}}$ par rapport à la majoration de $E\big(0,\frac{h}{k}\big)$, parce que l'on voit apparaître $S_3(l,m,n;\pm c,k)$ au lieu de $kK_{\pm\overline{h},k}(l,m,n)$).

On retrouve ainsi un résultat connu depuis Selberg, et redémontré par Smith dans [14] (voir aussi [13]). Notons que Heath-Brown ([7]) a étendu cette zone d'uniformité à $k \leq x^{\frac{21}{41}-\varepsilon}$.

Références

[1] F.V. Atkinson, *A divisor problem*, Quarterly Journal of Mathematics, **12** (1941), 193-200.

[2] E. Bombieri, *On some exponential sums in finite fields II*, Invent. Math., **47** (1978), 29-39.

[3] K. Chandrasekharan & R. Narasimhan, *The approximate functional equation for a class of zeta functions*, Math. Annalen, **152** (1963), 30-64.

[4] K. Chandrasekharan & S. Minakshisundaram, *Typical Means*, Oxford (1952).

[5] P. Deligne, *La conjecture de Weil I*, Inst. Hautes Etudes Sci., Publ. Math., **43** (1974), 273-307.

[6] P. Deligne, *Applications de la formule des traces aux sommes trigonométriques*, in *Séminaire de Géométrie Algébrique du Bois-Marie*, SGA $4\frac{1}{2}$, 168-232, Lecture Notes in Mathematics, **569**, Springer-Verlag, Berlin, New-York (1977).

[7] D.R. Heath-Brown, *The divisor function $d_3(n)$ in arithmetic progressions*, Acta Arithmetica, **47** (1986), 29-56.

[8] M. Jutila, *Lectures on a Method in the Theory of exponential Sums*, Tata Institute of fundamental Research, Bombay (1987).

[9] H.L. Montgomery, *Topics in multiplicative number theory*, Springer-Verlag, Berlin (1971).

[10] L.J. Mordell, *On a special polynomial congruence and exponential sums*, in *Calcutta Math. Soc. Golden Jubilee Commemoration volume*, Part I (1958-1959), 29-32.

[11] J.P. Serre, *Majorations de sommes d'exponentielles*, Astérisque, **41-42** (1977), 111-122.

[12] R.A. Smith, *On n-dimensional Kloosterman sums*, Journal of Number Theory, **11** (1979), 324-343.

[13] R.A. Smith, *The average order of a class of arithmetic functions over arithmetic progressions with applications to quadratic forms*, Journal für dir reine und angewandte Mathematik, **317** (1980), 74-87.

[14] R.A. Smith, *The generalized divisor problem over arithmetic progressions*, Math. Ann., **260** (1982), 255-268.

[15] G. Tenenbaum, *Introduction à la théorie analytique et probabiliste des nombres*, Publications de l'Institut Élie Cartan, Nancy (1990).

[16] E.C. Titchmarsh, *The theory of the Riemann Zeta-function*, Oxford University Press, Oxford (1951).

N° d'impression 1626

1er trimestre 1995

Résumé:

On s'intéresse dans ce travail à des sommes d'exponentielles, c'est-à-dire à des sommes dont le terme général est le produit d'un caractère additif par une fonction multiplicative. Deux cas seront envisagés, selon que le paramètre de l'exponentielle est rationnel ou irrationnel.

Dans une première partie la fonction multiplicative est à valeurs dans le disque unité et est nulle sur les entiers ayant de grands facteurs premiers. La densité logarithmique est étudiée. Le cas de la fonction unité et de la fonction de *Möbius* est précisé dans le cas d'un paramètre rationnel.

La deuxième partie présente une généralisation du théorème de *Daboussi* à une classe de fonctions comprenant notamment les fonctions diviseurs généralisées. Un phénomène de stabilité par convolution de *Dirichlet* est mis en évidence.

La troisième partie aborde le cas des fonctions diviseurs généralisées lorsque le paramètre est rationnel. En suivant une méthode de *Jutila*, on établit une formule de *Voronoï* pour le terme d'erreur. La formule fait intervenir des transformées de fonctions de *Bessel* et des sommes de *Kloosterman* modifiées. Pour de petites valeurs du dénominateur, on en déduit un résultat meilleur que par l'utilisation des caractères de *Dirichlet*. On prouve ensuite une formule de *Voronoï* complète pour les progressions arithmétiques et on retrouve un résultat classique dû à *Selberg*, et redémontré par *Smith*.

Summary:

In this work, we are interested in exponential sums, that is to say sums in which each term is the product of an additive character and a multiplicative function. Two cases will be studied, depending on whether the parameter is rational or irrational.

In the first part, the multiplicative function has its modulus at most one, and vanishes on integers whose prime factors are not all small. The logarithmic density is studied. For the unit functions and the *Möbius* function, the result is given more precisely when the parameter is rational.

The second part presents a generalization of *Daboussi*'s theorem to a class of functions containing the generalized divisor functions. A phenomenon of stability under *Dirichlet*'s convolution is pointed out.

The third part deals with generalized divisor functions when the parameter is rational. Following *Jutila*'s method, a formula à la *Voronoï* for the error term is proven. This formula contains transforms of *Bessel* functions and modified *Kloosterman* sums. For small values of the denominator, we deduce a better result than the one given by the use of *Dirichlet*'s characters. Then a complete *Voronoï* formula is proven for the arithmetic progressions, which implies a classical result due to *Selberg*, and reproved by *Smith*.

Mots clés:

Fonctions multiplicatives, sommes d'exponentielles, sommes de Kloosterman, fonctions de Bessel, formule de Voronoï, fonctions diviseurs, principe de l'hyperbole, équations fonctionnelles.