Majoration de sommes trigonométriques

Mémoire de DEA présenté par L. Goubin
sous la direction de H. Daboussi

Université Paris XI
13 octobre 1991

Chapitre 1

Introduction et préliminaires

1. Sommes trigonométriques du type $\sum\limits_{n\leq x} f(n)e(\alpha n)$.

On cherche à majorer des sommes de la forme $\sum\limits_{n\leq x} f(n)e(\alpha n)$, où f est une fonction arithmétique.

– On peut d'abord chercher des conditions suffisantes pour que: $\sum\limits_{n\leq x} f(n)e(\alpha n) = o(x)$.

Définition: Une fonction arithmétique f est dite *presque périodique B*, ou *p.p.B.* (pour Besicovitch), si et seulement si pour tout $\varepsilon>0$, il existe un polynôme trigonométrique $P_\varepsilon(n) = \sum a_j e^{2i\pi\alpha_j n}$, avec $\alpha_j \in \mathbf{R}$, tel que: $\limsup\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x} \sum\limits_{n\leq x} |f(n) - P_\varepsilon(n)| \leq \varepsilon$.

On a alors le résultat suivant (cf [7] et [4]):

Théorème 1. *Soit f multiplicative p.p.B. Alors $\forall\alpha \in \mathbf{R}\backslash\mathbf{Q}$, $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x} \sum\limits_{n\leq x} f(n)e(n\alpha) = 0$.*

En particulier ce théorème s'applique si f, multiplicative, vérifie $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{|f*\mu(n)|}{n}<+\infty$ (cf [30]) ou, ce qui est équivalent (cf [23] page 59), $\sum\limits_{p}\sum\limits_{r\geq 1} |f(p^r)-f(p^{r-1})|p^{-r}<+\infty$.
Si f est multiplicative et de module au plus 1, le théorème 1 ne peut s'appliquer que s'il existe un caractère de Dirichlet χ tel que la série $\sum\limits_{p} \frac{1-\chi(p)f(p)}{p}$ converge, ou bien si $\sum\limits_{p} \frac{1-|f(p)|}{p} = +\infty$ (cf [7] et [4]).
Mais en fait, H. Daboussi (cf [7], [8] et [23] page 392) a montré:

Théorème 2. *Si f multiplicative est de module au plus 1, alors:*

$$\forall\alpha \in \mathbf{R}\setminus\mathbf{Q},\ \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} \sum_{n\leq x} f(n)e(n\alpha) = 0.$$

On peut affaiblir l'hypothèse $|f| \leq 1$.

Définition: $\mathcal{L}^* = \{f : \mathbf{N}^* \to \mathbf{C},\ \lim\limits_{K\to+\infty} \sup\limits_{x\geq 1} \frac{1}{x} \sum\limits_{\substack{n\leq x\\ |f(n)|\geq K}} |f(n)| = 0\}$.

$\mathcal{L}_\lambda = \{f : \mathbf{N}^* \to \mathbf{C},\ \|f\|_\lambda<+\infty\}$ où $\|f\|_\lambda = \{\limsup\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x} \sum\limits_{n\leq x} |f(n)|^\lambda\}^{\frac{1}{\lambda}}$.

On montre facilement (cf [17]) que $\forall\lambda>1$, $\mathcal{L}_\lambda \subset \mathcal{L}^* \subset \mathcal{L}_1$
L'hypothèse $|f| \leq 1$ a successivement été remplacée par $f \in \mathcal{L}_2$ (H. Daboussi et H. Delange, [8]), puis $\exists\lambda>1$, $f \in \mathcal{L}_\lambda$ (H. Daboussi et H. Delange, [9]).
Enfin, K.H. Indlekofer (cf [18]) a montré:

Théorème 3. *Si f est multiplicative et appartient à $\mathcal{L}^*$, alors:*
$$\forall\alpha \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}, \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} \sum_{n\leq x} f(n)e(n\alpha) = 0.$$

Ce résultat généralise tous les précédents. En effet:

- $|f| \leq 1 \Rightarrow f \in \mathcal{L}_2 \Rightarrow (\exists\lambda>1,\ f \in \mathcal{L}_\lambda) \Rightarrow f \in \mathcal{L}^*$.
- On a f p.p.B $\Rightarrow f \in \mathcal{L}^*$. En effet si f est p.p.B, soit $\varepsilon>0$.
  $\exists P_\varepsilon(n) = \sum a_j e^{2i\pi\alpha_j n}$, $\limsup_{x\to+\infty} \frac{1}{x} \sum_{n\leq x} |f(n) - P_\varepsilon(n)| \leq \varepsilon$.
  D'une part $\lim_{K\to+\infty} \sup_{x\geq 1} \frac{1}{x} \sum_{\substack{n\leq x \\ |P_\varepsilon(n)|\geq K}} |P_\varepsilon(n)| = 0$ (il suffit de prendre $K > \sum |a_j|$).
  D'autre part $\limsup_{x\to+\infty} \frac{1}{x} \sum_{n\leq x} |f(n) - P_\varepsilon(n)| \leq \varepsilon \Rightarrow \exists x_0,\ \sup_{x\geq x_0} \frac{1}{x} \sum_{n\leq x} |f(n) - P_\varepsilon(n)| \leq 2\varepsilon$.
  Si on prend $K > \sup_{n\leq x_0} |f(n) - P_\varepsilon(n)|$, on a $\sup_{x\geq 1} \frac{1}{x} \sum_{\substack{n\leq x \\ |f(n)-P_\varepsilon(n)|\geq K}} |f(n) - P_\varepsilon(n)| \leq 2\varepsilon$.
  Donc $\forall\varepsilon>0$, $\lim_{K\to+\infty} \sup_{x\geq 1} \frac{1}{x} \sum_{\substack{n\leq x \\ |f(n)-P_\varepsilon(n)|\geq K}} |f(n) - P_\varepsilon(n)| \leq 2\varepsilon$.
  soit $\lim_{K\to+\infty} \sup_{x\geq 1} \frac{1}{x} \sum_{\substack{n\leq x \\ |f(n)-P_\varepsilon(n)|\geq K}} |f(n) - P_\varepsilon(n)| = 0$, c'est-à-dire $f \in \mathcal{L}^*$.

- Pour certaines fonctions multiplicatives f, on connaît des majorations plus précises de la somme $\sum_{n\leq x} f(n)e(n\alpha)$.
  - Si $f = 1$, $\sum_{n\leq x} f(n)e(n\alpha)$ est borné par $\min(x, \|\alpha\|^{-1})$ pour tout α irrationnel.
  - Si f multiplicative satisfait $\sum_{n\leq x} |f(n)|^2 = O(x)$ et est bornée sur les nombres premiers, alors $\sum_{n\leq x} f(n)e(n\alpha) = O(\frac{x}{\log x})$ pour presque tout α (cf [21]).

On étudie dans la suite le cas particulier où f est la fonction de Möbius μ.
Davenport (cf [10]) a montré que $\sum_{n\leq x} \mu(n)e(n\alpha) \ll_\lambda \frac{x}{(\log x)^\lambda}$ uniformément en α.
On va montrer comment l'identité de Vaughan permet d'obtenir ce résultat, ainsi que de meilleures majorations si on fait l'hypothèse qu'il n'y a pas de zéro de Siegel, ou bien que l'hypothèse de Riemann généralisée est vraie.

2. Méthode de Hardy-Littlewood-Vinogradov

- On cherche à majorer $\sum_{n\leq x} \mu(n)e(\alpha n)$ uniformément en $\alpha \in I$, où I est un intervalle de longueur 1. L'idée essentielle est de subdiviser l'intervalle I en sous-intervalles qui sont de deux types: les arcs majeurs et les arc mineurs.
- Si α est rationnel, la somme $\sum_{n\leq x} \mu(n)e(n\alpha)$ peut être estimée grâce aux résultats connus sur le comportement des $\mu(n)$ dans les progressions arithmétiques.

Aussi on devrait pouvoir évaluer $\sum\limits_{n\leq x}\mu(n)e(n\alpha)$ pour les réels α "proches" des rationnels à petit dénominateur.
Plus précisément, d'après un théorème de Dirichlet, on sait que:

$$\forall\alpha,\forall Q\in\mathbf{N}^*,\exists\mathbf{a},\exists\mathbf{q},(\mathbf{a},\mathbf{q})=\mathbf{1},\mathbf{1}\leq\mathbf{q}\leq\mathbf{Q},|\alpha-\frac{\mathbf{a}}{\mathbf{q}}|<\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{qQ}}.$$

Selon que q est "petit" ou au contraire voisin de Q, on dira que α est "bien" ou "mal" approché par les rationnels à petit dénominateur.
Soit δ et Q, fonctions de x à déterminer ultérieurement ($\delta\leq Q\leq x$). On suppose $\delta=o(Q)$.
On considère l'ensemble des rationnels $\frac{a}{q}$ vérifiant $(a,q)=1,0\leq a<q\leq\delta$ $(*)$.
x étant fixé, il n'y a qu'un nombre fini de tels rationnels.
À chacun d'eux on fait correspondre l'intervalle $I_{\frac{a}{q}}=]\frac{a}{q}-\frac{1}{qQ},\frac{a}{q}+\frac{1}{qQ}[$. Si x est suffisamment grand, les intervalles $I_{\frac{a}{q}}$ sont disjoints deux à deux car, $\frac{a_1}{q_1}$ et $\frac{a_2}{q_2}$ étant deux rationnels soumis aux conditions précédentes, on a: $|\frac{a_1}{q_1}-\frac{a_2}{q_2}|\geq\frac{1}{q_1q_2}\geq\frac{1}{q_1Q}+\frac{1}{q_2Q}$ (sinon $q_1+q_2\geq Q$, d'où $Q\leq 2\delta$, ce qui est faux pour x assez grand).
On choisit comme intervalle unité de base l'intervalle $I=]-\frac{1}{Q},1-\frac{1}{Q}[$. L'ensemble majeur, réunion des arcs majeurs, est défini par $M=\bigcup\limits_{a,q}I_{\frac{a}{q}}$, où la réunion est étendue à tous les couples (a,q) qui vérifient les conditions $(*)$. Il contient donc tous les nombres α qui sont "bien approchés" par les rationnels à petit dénominateur. L'ensemble mineur, $m=I\setminus M$, ne contient au contraire que les nombres α "mal approchés" par ces rationnels.

- Sur les arcs majeurs, on approchera $\sum\limits_{n\leq x}\mu(n)e(n\alpha)$ en utilisant des sommes du type $\sum\limits_{\substack{m\leq n\\ m\equiv r \bmod q}}\mu(m)$, qu'on estimera à l'aide de majorations de $\frac{1}{L(s,\chi)}$. Sur les arcs mineurs, on utilisera l'identité de Vaughan pour majorer $\sum\limits_{n\leq x}\mu(n)e(n\alpha)$.

3. Quelques lemmes utiles

a) Propriétés de la fonction $d(n)$

Lemme 1. $\forall k\geq 1,\ \sum\limits_{n\leq x}d(n)^k\ll x(\log x)^{2^k-1}$.

PREUVE :

- Soit h la fonction multiplicative définie par:

$$\forall\alpha\geq 0,\forall p\text{ premier},h(p^\alpha)=(\alpha+1)^k-\alpha^k\qquad(h(1)=1)).$$

On a $d(p^\alpha)^k=(\alpha+1)^k=\sum\limits_{r=0}^{a}((r+1)^k-r^k)=\sum\limits_{r=0}^{a}h(p^r)=\sum\limits_{d|p^a}h(d)=(h*\mathbf{1})(p^a)$ d'où, par multiplicativité, $d(n)^k=(h*\mathbf{1})(n)$.

- Donc $\sum\limits_{n\leq x}d(n)^k=\sum\limits_{n\leq x}\sum\limits_{d|n}h(d)\leq\sum\limits_{d\leq x}h(d)\lfloor\frac{x}{d}\rfloor\leq x\sum\limits_{d\leq x}\frac{h(d)}{d}\leq x\prod\limits_{p\leq x}(1+\frac{h(p)}{p}+\frac{h(p^2)}{p^2}+\ldots)$.
- $1+\frac{h(p)}{p}+\ldots=1+\frac{2^k-1}{p}+\ldots$: on reconnaît le début du développement de $(1-\frac{1}{p})^{1-2^k}$.

Montrons que $1+\frac{h(p)}{p}+\frac{h(p^2)}{p^2}+\ldots\leq(1-\frac{1}{p})^{1-2^k}$.

On a : $(1-\frac{1}{p})^{1-2^k} = 1 + \frac{2^k-1}{p} + \frac{(2^k-1)2^k}{2p^2} + \ldots + \frac{(2^k-1)\ldots(2^k-1+(j-1))}{j!p^j} + \ldots$.
Donc il suffit de montrer que $h(p^j) \leq \frac{(2^k-2+j)!}{j!(2^k-2)!}$, c'est-à-dire $(j+1)^k - j^k \leq \begin{pmatrix} 2^k-2+j \\ j \end{pmatrix}$ pour $j \geq 0$ et $k \geq 1$.

– Si l'inégalité est montrée, on aura: $\sum_{n\leq x} d(n)^k \leq x \prod_{p\leq x}(1-\frac{1}{p})^{1-2^k} \ll x(\log x)^{2^k-1}$ d'après la formule de Mertens.

Lemme 2. $\forall n \in \mathbf{N}, \forall \mathbf{k} \in \mathbf{N}^*, (\mathbf{n}+\mathbf{1})^{\mathbf{k}} - \mathbf{n}^{\mathbf{k}} \leq \begin{pmatrix} 2^k-2+n \\ n \end{pmatrix}$.

PREUVE :

– Posons $u_n = (n+1)^k - n^k$ et $v_n = \frac{(2^k-2+n)!}{n!(2^k-2)!}$.
On a $u_0 = v_0 = 1$ et $u_1 = v_1 = 2^k - 1$. Il suffit de montrer que $\forall n \in \mathbf{N}, \frac{\mathbf{u_{n+1}}}{\mathbf{u_n}} \leq \frac{\mathbf{v_{n+1}}}{\mathbf{v_n}}$.
$\Leftrightarrow \frac{(n+2)^k-(n+1)^k}{(n+1)^k-n^k} \leq \frac{(n+2^k-1)!n!(2^k-2)!}{(n+1)!(2^k-2)!(n+2^k-2)!} = \frac{n+2^k-1}{n+1}$
$\Leftrightarrow (n+1)(n+2)^k - (n+1)^{k+1} \leq (n+2^k-1)(n+1)^k - n^k(n+2^k-1)$
$\Leftrightarrow (n+1)(n+2)^k - (2n+2^k)(n+1)^k + (n-1+2^k)n^k \leq 0$.

– Soit $g(y) = (y+1)(y+2)^k - (2y+2^k)(y+1)^k + (y-1+2^k)y^k$.
On a $g(y) = y^k(1+2k-2^k-2k-1+2^k) + \sum_{j=1}^{k-1}(C_k^{j-1}(2^{k-j+1}-2) + C_k^j(2^{k-j} - 2^k))y^j + (2^k-2^k)$
$\Rightarrow g(y) = \sum_{j=1}^{k-1} \frac{k!}{(k-j-1)!j!}(2j(2^{k-j}-1) + (k-j)(2^{k-j}-2^k))y^j$.
Il suffit donc de montrer que $\forall j \in \{1\ldots k-1\}, 2j(2^{k-j}-1)+(k-j)(2^{k-j}-2^k) \leq 0$, c'est-à-dire: $(k+j)2^{k-j} \leq 2j + (k-j)2^k$ pour $1 \leq j \leq k-1$, soit, en posant $k = j + l$:

$$\forall j \geq 1, \forall l \geq 1, (2j+l)2^l \leq 2j + l2^{j+l}.$$

– On le montre par récurrence sur j:
  – pour $j = 1$, $(2+l)2^l \leq 2 + l2^{l+1} \Leftrightarrow 0 \leq 2 + (l-2)2^l$, ce qui est vrai pour tout $l \geq 1$.
  – si le résultat est vrai au rang j ($\forall l \in \mathbf{N}^*, (\mathbf{2j}+\mathbf{l})\mathbf{2^l} \leq \mathbf{2j} + \mathbf{l2^{j+l}}$), alors il est vrai au rang $(j+1)$ à condition d'avoir $2^{l+1} \leq 2 + l2^{j+l}$, soit $2 + 2^l(l2^j - 2) \geq 0$, ce qui est vrai pour tout $l \geq 1$.

D'où le résultat.

b) Majoration de sommes élémentaires

L'estimation des sommes de type (I) est facilitée par le résultat suivant:

Lemme 3. *On suppose* $X \geq 1$, $Y \geq 1$, $(a,q) = 1$, $|\alpha - \frac{a}{q}| \leq \frac{1}{q^2}$ $(\alpha \in \mathbf{R})$.
Alors (i) $\sum_{x\leq X} \min(Y, \|\alpha x\|^{-1}) \ll XYq^{-1} + (X+q)\log 2q + Y$.
(ii) $\sum_{x\leq X} \min(XYx^{-1}, \|\alpha x\|^{-1}) \ll (XYq^{-1} + X + q)\log 2XYq$.

PREUVE : (i) Écrivons x sous la forme $x = hq + r$, où $1 \leq r \leq q$. Soit $\beta = \alpha - \frac{a}{q}$.

$$\sum_{x\leq X} \min(Y, \|\alpha x\|^{-1}) \ll \sum_{0\leq h\leq \frac{X}{q}} \sum_{r=1}^{q} \min(Y, \|r\frac{a}{q} + hq\beta + r\beta\|^{-1}).$$

– Considérons d'abord les termes pour lesquels $h = 0$ et $1 \leq r \leq \frac{q}{2}$.

Comme $|r\beta| \le \frac{1}{2q}$, la contribution de ces termes est $\ll \sum_{1\le r\le \frac{q}{2}} \frac{1}{\|\frac{ra}{q}\| - \frac{1}{2q}} \ll$ $q\log q$.

En effet: $\sum_{1\le r\le \frac{q}{2}} \frac{1}{\|\frac{ra}{q}\|-\frac{1}{2q}} \le \sum_{1\le r\le q} \frac{1}{\|\frac{ra}{q}\|-\frac{1}{2q}}$, et comme $(a,q) = 1$, ra décrit toutes les classes modulo q, d'où:

$$\sum_{1\le r\le \frac{q}{2}} \frac{1}{\|\frac{ra}{q}\| - \frac{1}{2q}} \le 2 \sum_{1\le s\le \frac{q}{2}} \frac{1}{\frac{s-1/2}{q}} \ll q\log q.$$

– Pour les autres termes, on remarque que, pour h fixé et I intervalle de largeur $\frac{1}{q}$ contenu dans $[0,1]$, il y a au plus 4 valeurs de r, $1 \le r \le q$, pour lesquelles $r\frac{a}{q} + hq\beta + r\beta \in I$ mod 1, donc:

$$\sum_{0\le h\le \frac{X}{q}} \sum_{r=1}^{q} \min(Y,\|r\frac{a}{q}+hq\beta+r\beta\|^{-1}) \ll \sum_{0\le h\le \frac{X}{q}} (Y+q\log q) \ll \frac{XY}{q}+(X+q)\log q+Y.$$

(ii) On procède comme pour (i).

– Dans le cas où $h = 0$ et $1 \le r \le \frac{q}{2}$, on obtient la même majoration en $q\log q$.

– Dans le deuxième cas, on trouve

$$\sum_{0\le h\le \frac{X}{q}} \sum_{r=1}^{q} \min(\frac{XY}{(h+1)q},\|r\frac{a}{q} + hq\beta + r\beta\|^{-1}) \ll \sum_{0\le h\le \frac{X}{q}} (\frac{XY}{(h+1)q} + q\log q)$$

$$\ll (XYq^{-1} + X + q)\log 2XYq.$$

Pour étudier les sommes de type (II): $\sum_m \sum_n a_m b_n f(mn)$, on se ramène à des sommes de type (I) avec l'inégalité de Cauchy-Schwarz. En effet, on doit estimer ${}^t aFb$, où F est une forme bilinéaire, et $|{}^t aFb| \le \|a\|\|Fb\| = \|a\|{<}Fb,Fb{>}^{\frac{1}{2}} = \|a\|{<}b,F^*Fb{>}^{\frac{1}{2}}$.

Comme F^*F est hermitienne, il suffit d'étudier la plus grande valeur propre λ.

Lemme 4. *Si A est une forme hermitienne et $\rho(A) = \sup_{\lambda\in Sp(A)} |\lambda|$,*

$$\textit{alors } \rho(A) \le \|A\|_\infty = \max_i \sum_j |\alpha_{ij}|, \textit{ où } A = (\alpha_{ij}).$$

PREUVE : Soit λ une valeur propre de A telle que $\rho(A) = |\lambda|$.

Soit $\mathbf{v}$ un vecteur propre associé à λ et $\mathbf{w}$ un vecteur tel que $\mathbf{v}^t\mathbf{w} \ne \mathbf{0}$. Alors:

$$\rho(A)\|\mathbf{v}^t\mathbf{w}\|_\infty = \|\lambda\mathbf{v}^t\mathbf{w}\|_\infty = \|A\mathbf{v}^t\mathbf{w}\|_\infty \le \|A\|_\infty\|\mathbf{v}^t\mathbf{w}\|_\infty$$

d'où $\rho(A) \le \|A\|_\infty$.

Dans le cas qui nous intéresse, on a F^*F positive, donc $\sup_{\lambda\in Sp(A)} |\lambda| = \sup_{\lambda\in Sp(A)} \lambda$, d'où :

$$|{}^t aFb|^2 \le \|a\|^2\|b\|^2 \max_n \sum_{n'} |\sum_m f(mn)\overline{f(mn')}|.$$

Chapitre 2

Majoration sur les arcs mineurs

1. La méthode de Vinogradov-Vaughan

a) Motivations et historique

- On cherche à évaluer des sommes de la forme:

$$\sum_{p\leq x} g(p). \tag{1}$$

En faisant une sommation par parties, on peut se ramener à étudier des sommes du type

$$\sum_{n\leq x} \Lambda(n) f(n).$$

En effet, si on pose $f(t) = \frac{g(t)}{\log t}$, on a:

$\sum\limits_{p\leq x} g(p) = \sum\limits_{p\leq x} f(p) \log p = f(x) \sum\limits_{p\leq x} \log p - \int\limits_1^x (\sum\limits_{p\leq u} \log p) f'(u) du.$

Or on a $\sum\limits_{p\leq x} \log p \sim \sum\limits_{n\leq x} \Lambda(n)$ (voir par exemple [23]).

Donc $\sum\limits_{p\leq x} g(p) \sim f(x) \sum\limits_{n\leq x} \Lambda(n) - \int\limits_1^x (\sum\limits_{n\leq u} \Lambda(n)) f'(u) du = \sum\limits_{n\leq x} \Lambda(n) f(n).$

- Pour des fonctions multiplicatives de la forme $f(n) = \chi(n) n^{-s}$, on peut estimer $\sum\limits_{p\leq x} f(p)$ en utilisant la région sans zéro de $L(s,\chi)$.

En 1937, I.M. Vinogradov a introduit une nouvelle méthode pour estimer des sommes $\sum\limits_{p\leq x} f(p)$, où f oscille mais n'est pas multiplicative (cf [29] chapitre 9).

Son point de départ était une idée simple de crible. Soit $P = \prod\limits_{p\leq\sqrt{x}} p$. D'après le crible d'Érathostène, on a:

$$f(1) + \sum_{\sqrt{x}\leq p\leq x} f(p) = \sum_{m|P} \mu(m) \sum_{n\leq \frac{x}{m}} f(mn). \tag{2}$$

En effet:

$$\sum_{m|P} \sum_{n\leq \frac{x}{m}} \mu(m) f(mn) = \sum_{u\leq x} \alpha_u f(u).$$

- Si $u = p_1^{\alpha_1} \dots p_k^{\alpha_k} p_{k+1}^{\alpha_{k+1}} \dots p_K^{\alpha_K}$ (u possède exactement k facteurs premiers $p_1, \dots ,p_k$ dans $[1,\sqrt{x}]$), on a : $\alpha_u = \mu(1)+(\mu(p_1)+\dots+\mu(p_k))+(\mu(p_1p_2)+ \dots + \mu(p_{k-1}p_k)) + \dots$

  soit $\alpha_u = \sum_{v=0}^{k} C_k^v(-1)^v = (1-1)^k = 0$.
- Sinon u a tous ses facteurs premiers $>\sqrt{x}$, donc on a soit (u premier et $\sqrt{x}<u<x$), soit $u = 1$, d'où $\alpha_u = 1$.

On est donc amené à majorer des sommes du type $\sum_{n\leq \frac{x}{m}} f(mn)$. On voudrait montrer que ces sommes sont petites. Cependant, on ne peut pas espérer beaucoup de compensations entre les termes si m est du même ordre de grandeur que x, car la somme contient alors peu de termes.

C'est pourquoi Vinogradov a réarrangé les termes venant des $m|P$ tels que $\delta(x) \leq m \leq x$, ce qui entraîne de grandes complications.

– De manière générale, pour majorer (1), on se ramène à des sommes de:
  - type (I) : $\sum_{m\leq x} \sum_{mn\leq x} a_m f(mn)$
  - type (II): $\sum_{m\leq x} \sum_{mn\leq x} a_m b_n f(mn)$

  Les sommes de type (I) donnent de bonnes estimations quand $a_m = 0$ pour m proche de x, alors que celles de type (II) se majorent bien quand m décrit un intervalle $[M,M']$, où M et M' sont assez grands, mais petits devant x.

  Le membre de droite de (2) est du type (I), mais a le défaut de faire intervenir m proche de x. C'est pourquoi on a recours à un argument combinatoire: les m dont tous les facteurs premiers sont $\leq z$ (où z est un paramètre) sont rares: on les néglige. Les autres sont de la forme $pr,z<p \leq \sqrt{x}$. On obtient une somme $\sum_{z<p\leq\sqrt{x}} \sum_{k} a_p b_k f(pk)$ qui est de la bonne forme (type (II)).

– La formalisation de la majoration des sommes (1) a connu de nouveaux progrès à la suite de la démonstration du théorème de Bombieri-Vinogradov.

  Bombieri et Rényi ont utilisé le grand crible pour estimer le nombre de zéros des fonctions L dans certains rectangles, et en ont déduit:

$$\sum_{q\leq Q} \frac{q}{\phi(q)} \sum_{\chi}^{*} \max_{y\leq x} |\psi(y,\chi)| \ll (x + x^{5/6}Q + x^{1/2}Q^2)(\log Qx)^4$$

  grâce à la formule explicite

$$\psi_0(x,\chi) = -\sum_{\rho} \frac{x^\rho}{\rho} - \frac{L'(0,\chi)}{L(0,\chi)} + \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{x^{1-2m}}{2m-1}$$

  où les ρ sont les zéros non triviaux de L et $\psi_0(x,\chi)$ vaut $\psi(x,\chi)$ si x n'est pas une puissance de nombre premier, $\psi(x,\chi) - \frac{1}{2}\Lambda(x)\chi(x)$ sinon.

  Plus précisément, si $N(\sigma,T,\chi)$ désigne le nombre de zéros ρ de $L(s,\chi)$ dans le rectangle $\sigma \leq \beta \leq 1,|\gamma| \leq T$, Bombieri a montré (cf [2]) que:

$$\sum_{q\leq Q} \sum_{\chi}^{*} N(\sigma,T,\chi) \ll T(Q^2 + QT)^{\frac{4(1-\sigma)}{(3-2\sigma)}}(\log QT)^{10}$$

  ce qui a été substantiellement amélioré par Montgomery (cf [20] chapitre 12 et [3]).

  Gallagher (cf [14]) a prouvé le théorème de Bombieri-Vinogradov sans étudier les zéros de L, en appliquant la transformée de Mellin à l'identité:

$$-\frac{L'}{L} = -\frac{L'}{L}(1-LG)^2 - 2L'G + L'LG^2.$$

Vaughan (cf [25] et [27]) a trouvé qu'il était plus efficace d'utiliser l'identité:

$$-\frac{L'}{L} = F - LFG - L'G + (-\frac{L'}{L} - F)(1 - LG) \tag{3}$$

puis a découvert qu'on pouvait utiliser (3) pour obtenir une nouvelle forme de la méthode de Vinogradov: c'est l'identité de Vaughan, dans laquelle les détails sont beaucoup plus simples à mettre en œuvre que dans la méthode initiale de Vinogradov.

b) L'identité de Vaughan

- Si on pose $G(s) = \sum_{n \leq u} \mu(n)n^{-s}$ et $F(s) = \sum_{n \leq v} \Lambda(n)n^{-s}$, on a l'identité suivante:

$$\forall \sigma > 1, -\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} = F(s) - \zeta'(s)G(s) - \zeta(s)F(s)G(s) + (-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} - F(s))(1 - \zeta(s)G(s)) \tag{4}$$

- En calculant les coefficients des séries de Dirichlet dans (4), on obtient: $\Lambda(n) = a_0(n) + a_1(n) + a_2(n) + a_3(n)$, avec:
  - $a_0(n) = \begin{cases} \Lambda(n) & \text{si } n \leq v \\ 0 & \text{si } n > v \end{cases}$.
  - $a_1(n) = \sum_{\substack{dm=n \\ d \leq u}} \mu(d) \log m$.
  - $a_2(n) = -\sum_{\substack{mdr=n \\ d \leq u, m \leq v}} \Lambda(m)\mu(d)$.
  - $a_3(n) = -\sum_{\substack{mk=n \\ k>v, m>1}} \Lambda(k)(\sum_{\substack{d|m \\ d \leq u}} \mu(d))$.

  En effet $\forall \sigma > 1, \zeta(s) = \prod_p \frac{1}{1-p^{-s}} \Rightarrow \log \zeta(s) = \sum_p \log \frac{1}{1-p^{-s}}$

  donc $\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} = -\sum_p \frac{(\log p)p^{-s}}{1-p^{-s}} = -\sum_p \sum_{l \geq 1} (\log p)p^{-ls} = -\sum_n \Lambda(n)n^{-s}$

  En multipliant par $f(n)$ et en sommant, on obtient:

$$\sum_{n \leq N} \Lambda(n)f(n) = S_0 + S_1 - S_2 - S_3 \tag{5}$$

  - $S_0 = \sum_{n \leq v} \Lambda(n)f(n)$.
  - $S_1 = \sum_{d \leq u} \sum_{m \leq \frac{N}{d}} \mu(d)(\log m)f(dm)$.
  - $S_2 = \sum_{k \leq uv} \sum_{r \leq \frac{N}{k}} c_k f(kr)$, où $c_k = \sum_{\substack{d \leq u, n \leq v \\ dn=k}} \mu(d)\Lambda(n)$.
  - $S_3 = \sum_{u < m \leq \frac{N}{v}} \sum_{v < n \leq \frac{N}{m}} d_m \Lambda(n) f(mn)$, où $d_m = \sum_{\substack{d|m \\ d \leq u}} \mu(d)$.

  (pour S_3, on utilise le fait que $\sum_{\substack{d|m \\ d \leq u}} \mu(d) = 0$ pour $1 < m \leq u$).

  Pour appliquer cette identité, on considérera qu'il y a une symétrie qui fasse que le meilleur choix de u et v consiste à les prendre de la même grandeur. On prendra donc $u = v$.
- On peut "supprimer" le facteur $(\log m)$ dans S_1 en intervertissant les sommes:

$$S_1 = \sum_{d \leq u} \int_1^{\frac{N}{d}} \frac{1}{\omega} \sum_{\omega < m \leq \frac{N}{d}} \mu(d)f(dm)d\omega = \int_1^N \sum_{d \leq \min(u, \frac{N}{\omega})} \sum_{\omega < m \leq \frac{N}{d}} \mu(d)f(dm)\frac{d\omega}{\omega}$$

d'après le théorème de Fubini (pour $m \leq \frac{N}{d}$, $\int\limits_1^m \frac{d\omega}{\omega} = \log m$).

- S_1 et S_2 sont essentiellement de type (I) et S_3 de type (II). De plus, pour un choix convenable de u et v, on peut s'attendre à de "bonnes sommes".
- L'estimation de S_2 peut être parfois améliorée en séparant la somme en deux:

$$S_2 = \underbrace{S_2^{(1)}}_{k \leq u} + \underbrace{S_2^{(2)}}_{k > u}$$

ce qui fournit $S_2^{(1)}$ de type (I) et $S_2^{(2)}$ de type (II).

2. Application à l'étude de $\sum\limits_{n \leq x} \mu(n)e(\alpha n)$ sur les arcs mineurs

a) Généralisation de l'identité de Vaughan

- On peut appliquer la même méthode que pour $\sum \Lambda(n)f(n)$ à des sommes de la forme $\sum \mu(n)f(n)$ ou plus généralement à des sommes de la forme $\sum g(n)f(n)$ si la convolution $(g * \mathbf{1})(n)$ se "comporte bien" (par exemple si elle est monotone), ou plus généralement si $g * \mathbf{1} * \ldots * \mathbf{1}$ se comporte bien (en itérant).
- Par le même raisonnement qu'au paragraphe précédent, on trouve:

$$\sum_{n \leq N} g(n)f(n) = S_0 + S_1 - S_2 - S_3. \tag{6}$$

  - $S_0 = \sum\limits_{n \leq v} g(n)f(n)$.
  - $S_1 = \sum\limits_{d \leq u} \sum\limits_{m \leq \frac{N}{d}} \mu(d)(g * \mathbf{1})(m)f(dm)$.
  - $S_2 = \sum\limits_{k \leq uv} \sum\limits_{r \leq \frac{N}{k}} c_k f(kr)$, où $c_k = \sum\limits_{\substack{d \leq u, n \leq v \\ dn = k}} \mu(d)g(n)$.
  - $S_3 = \sum\limits_{u < m \leq \frac{N}{v}} \sum\limits_{v < n \leq \frac{N}{m}} d_m g(n)f(mn)$, où $d_m = \sum\limits_{\substack{d \mid m \\ d \leq u}} \mu(d)$.

  Comme précédemment, on prendra en général $u = v$.
  Si $g = \mu$, S_1 se simplifie car $\mu * \mathbf{1} = e$. On a alors $\sum\limits_{n \leq N} \mu(n)f(n) = 2S_0 - S_2 - S_3$ (cela revient à utiliser l'identité $\frac{1}{\zeta(s)} = 2G(s) - G(s)^2\zeta(s) - (\zeta(s)G(s) - 1)(\frac{1}{\zeta(s)} - G(s))$ avec $G(s) = \sum\limits_{n \leq u} \mu(n)n^{-s}$ au lieu de (4)).

b) Majoration de la somme $\sum\limits_{n \leq x} \mu(n)e(\alpha n)$

Théorème 1. *On suppose* $(a,q) = 1$, $|\alpha - \frac{a}{q}| \leq \frac{1}{qQ}$, *avec* $\delta \leq q \leq Q \leq x$.
Alors $\sum\limits_{n \leq x} \mu(n)e(n\alpha) \ll (\log x)^3(x\delta^{-1/2} + x^{1/2}Q^{1/2} + x^{5/6})$.

Démonstration :

- On utilise l'identité de Vaughan (généralisée) avec $u = v$.
  D'après (6), on a $\sum\limits_{n \leq x} \mu(n)e(\alpha n) = S_0 + S_1 - S_2 - S_3$, avec:
  - $S_0 = \sum\limits_{n \leq u} \mu(n)e(\alpha n)$.

– $S_1 = \sum_{d \le u} \sum_{m \le \frac{x}{d}} \mu(d)(\mu * \mathbf{1})(m) e(\alpha dm) = \sum_{d \le u} \mu(d) e(d\alpha)$.

– $S_2 = \sum_{k \le u^2} \sum_{r \le \frac{x}{k}} c_k e(\alpha kr)$, où $c_k = \sum_{\substack{d \le u, n \le u \\ dn = k}} \mu(d)\mu(n)$.

– $S_3 = \sum_{u < m \le \frac{x}{u}} \sum_{u < n \le \frac{x}{m}} d_m \mu(n) e(\alpha mn)$, où $d_m = \sum_{\substack{d \mid m \\ d \le u}} \mu(d)$.

- On majore S_0 grossièrement: $|S_0| \le \sum_{n \le u} |\mu(n)| \le u$.
- De même $|S_1| \le u$.
- On a $c_k = \sum_{\substack{\frac{k}{u} \le d \le u \\ d \mid k}} \mu(d)\mu(\frac{k}{d}) \Rightarrow |c_k| \le d(k)$.

  D'autre part $\sum_{r \le \frac{x}{k}} e(\alpha kr) = \frac{e(\alpha k(\lfloor \frac{x}{k} \rfloor + 1)) - e(\alpha k)}{e(\alpha k) - 1} = \frac{e(\frac{\alpha k}{2}(\lfloor \frac{x}{k} \rfloor + 2))}{e(\frac{\alpha k}{2})} \frac{\sin(\pi \alpha k \lfloor \frac{x}{k} \rfloor)}{\sin(\pi \alpha k)}$.

  Donc $|\sum_{r \le \frac{x}{k}} e(\alpha kr)| \le \frac{1}{|\sin(\pi \alpha k)|} \le \frac{1}{\|\alpha k\|}$.

  D'où $|S_2| = |\sum_{k \le u^2} \sum_{r \le \frac{x}{k}} c_k e(\alpha kr)| \le \sum_{k \le u^2} d(k) |\sum_{r \le \frac{x}{k}} e(\alpha kr)| \le \sum_{k \le u^2} d(k) \min(\frac{x}{k}, \|\alpha k\|^{-1})$.

  Le calcul d'Hajela et Smith (cf [15]) pour majorer S_2 est erroné. On va procéder autrement. En faisant un découpage dyadique, on se ramène à majorer $\sum_{K \le k \le 2K} d(k) \min(\frac{x}{K}, \|\alpha k\|^{-1})$. D'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz, cette somme est majorée par:

$$(\sum_{K \le k \le 2K} d(k)^2)^{\frac{1}{2}} (\sum_{K \le k \le 2K} \min(\frac{x}{K}, \|\alpha k\|^{-1})^2)^{\frac{1}{2}}$$

  Un raisonnement analogue au lemme 3 donne alors (comme dans [1]):

$$\sum_{K \le k \le 2K} d(k) \min(\frac{x}{K}, \|\alpha k\|^{-1}) \ll (xq^{-\frac{1}{2}} + x^{\frac{1}{2}} u + x^{\frac{1}{2}} q^{\frac{1}{2}})(\log x)^2$$

  puis

$$|S_2| \ll (xq^{-\frac{1}{2}} + x^{\frac{1}{2}} u + x^{\frac{1}{2}} q^{\frac{1}{2}}) \mathcal{L}^3$$

- On a $|d_m| \le \mathbf{1} * \mathbf{1}(m) = d(m)$.

  Pour majorer S_3, le problème est que m varie dans un grand intervalle. On fait un découpage dyadique. Soit $\mathcal{M} = \{2^j u, j = 0, 1, \ldots / 2^j \le \frac{x}{u^2}\}$.

  Alors $S_3 = \sum_{M \in \mathcal{M}} S(M)$, où $S(M) = \sum_{M < m \le 2M} \sum_{u < n \le \frac{x}{m}} d_m \mu(n) e(\alpha mn)$.

  D'après Cauchy-Schwarz, $|S(M)|^2 \le (\sum_{M < m \le 2M} |d_m|^2)(\sum_{M < m \le 2M} |\sum_{u < n \le \frac{x}{m}} \mu(n) e(\alpha mn)|^2)$.

$$\sum_{M < m \le 2M} |\sum_{u < n \le \frac{x}{m}} \mu(n) e(\alpha mn)|^2 = \sum_{M < m \le 2M} \sum_{u < n \le \frac{x}{m}} \sum_{u < n' \le \frac{x}{m}} e(\alpha m(n - n'))\mu(n)\mu(n')$$

$$= \sum_{u < n \le \frac{x}{M}} \sum_{u < n' \le \frac{x}{M}} \mu(n)\mu(n')(\sum_{\substack{M < m \le 2M \\ m \le \frac{x}{n}, m \le \frac{x}{n'}}} e(\alpha m(n - n')))$$

$$\le (\sum_{n \le \frac{x}{M}} \mu(n)^2) \max_n \sum_{n' \le \frac{x}{M}} |\sum_{\substack{M < m \le 2M \\ m \le \frac{x}{n}, m \le \frac{x}{n'}}} e(\alpha m(n - n'))|$$

  d'après le lemme 4.

  Donc $|S(M)|^2 \le (\sum_{M < m \le 2M} |d_m|^2)(\sum_{n \le \frac{x}{M}} \mu(n)^2) \max_n \sum_{n' \le \frac{x}{M}} |\sum_{\substack{M < m \le 2M \\ m \le \frac{x}{n}, m \le \frac{x}{n'}}} e(\alpha m(n - n'))|$

$\ll (M\mathcal{L}^3)(\frac{x}{M}) \sum_{0 \le h \le \frac{x}{M}} \min(M, \|\alpha h\|^{-1})$, car:

- $\sum_{M<m\le 2M} |d_m|^2 \le \sum_{M<m\le 2M} d(m)^2 \ll M\mathcal{L}^3$, d'après le lemme 1.
- $|\sum_{\substack{M<m\le 2M\\ m\le \frac{x}{n}, m\le \frac{x}{n'}}} e(\alpha m(n-n'))| \le \frac{1}{|\sin(\pi\alpha(n-n'))|} \le \frac{1}{\|\alpha(n-n')\|}$ comme précédemment, d'où
  $\max_n \sum_{n'\le \frac{x}{M}} |\sum_{\substack{M<m\le 2M\\ m\le \frac{x}{n}, m\le \frac{x}{n'}}} e(\alpha m(n-n'))| \ll \sum_{0\le h\le \frac{x}{M}} \min(M, \|\alpha h\|^{-1})$, car $\|-x\| = \|x\|$.

Donc $|S(M)|^2 \ll x\mathcal{L}^3 \sum_{0\le h\le \frac{x}{M}} \min(M, \|\alpha h\|^{-1}) \ll x\mathcal{L}^3(xq^{-1} + M + \frac{x}{M} + q)\mathcal{L}$,
d'après le lemme $3(i)(x \ge q)$. Comme il y a $\ll \mathcal{L}$ sommes, on trouve:

$$S_3 \ll \mathcal{L}(x\mathcal{L}^4(xq^{-1} + M + q))^{1/2} \ll \mathcal{L}^3(xq^{-1/2} + xu^{-1/2} + x^{1/2}q^{1/2})$$

car $\sqrt{xM} \le \sqrt{x}\sqrt{\frac{x}{u}}$.

- En regroupant tout ce qui précède, on trouve, pour $x \ge q$:

$$\sum_{n\le x} \mu(n)e(n\alpha) \ll u + (xq^{-\frac{1}{2}} + x^{\frac{1}{2}}u + x^{\frac{1}{2}}q^{\frac{1}{2}})\mathcal{L}^3 + (xq^{-1/2} + xu^{-1/2} + x^{1/2}q^{1/2})\mathcal{L}^3$$

Comme $x^{\frac{1}{2}}u = xu^{-1/2} \Leftrightarrow u = x^{1/3}$, on prend $u = x^{1/3}$, d'où finalement:

$$\sum_{n\le x} \mu(n)e(n\alpha) \ll \mathcal{L}^3(xq^{-1/2} + x^{5/6} + x^{1/2}q^{1/2}).$$

(on a supposé $x \ge q$, mais la majoration est triviale pour $q \ge x$).

Chapitre 3

Majoration sur les arcs majeurs

Sur ces arcs, α est "proche" d'un rationnel à petit dénominateur. Cette idée est traduite par le lemme suivant:

Lemme 1. *Supposons que* $|\alpha - \frac{a}{q}| \leq \frac{1}{qQ}$, *avec* $q \leq \delta \leq Q$.
Alors $|\sum_{n\leq x} \mu(n)e(n\alpha)| \leq (\delta + \frac{x}{Q}) \max_{n\leq x} \max_{r\leq q} |\sum_{\substack{m\leq n \\ m\equiv r \bmod q}} \mu(m)|$.

Preuve : Soit $M_n = \sum_{m\leq n} \mu(m)e(\frac{am}{q}) = \sum_{r\leq q} e(\frac{ar}{q}) \sum_{\substack{m\leq n \\ m\equiv r \bmod q}} \mu(m)$.

Soit $\beta = \alpha - \frac{a}{q}$. Si on pose $M_0 = 0$, on a:

$|\sum_{n\leq x} \mu(n)e(n\frac{a}{q} + n\beta)| = |\sum_{n\leq x} (M_n - M_{n-1})e(n\beta)|$

$= |M_x e(\beta x) + \sum_{n\leq x-1} M_n e(n\beta)(1-e(\beta))|$ par transformation d'Abel,

$\ll (\max_{n\leq x} |M_n|)(x|\beta|+1)$, car $\begin{cases} |e(\beta x)| = 1 = |e(n\beta)| \\ |e(n\beta)(1-e(\beta))| = |\sin\beta\pi| \leq \pi|\beta| \end{cases}$

$\ll (1 + \frac{x}{qQ})q \max_{n\leq x} \max_{r\leq q} |\sum_{\substack{m\leq n \\ m\equiv r \bmod q}} \mu(m)|$, d'où le lemme.

Le problème consiste donc à majorer $\sum_{\substack{m\leq n \\ m\equiv r \bmod q}} \mu(m)$. L'identité $\sum_{n=1}^{+\infty} \mu(n)\chi(n)n^{-s} = \frac{1}{L(s,\chi)}$, valable pour $\sigma>1$, conduit à chercher une estimation de $\frac{1}{L(s,\chi)}$ pour utiliser ensuite la formule de Perron.

1. Estimations de $\frac{1}{L(s,\chi)}$

On sait qu'il existe une constante absolue c_1 telle que:

- Si χ est un caractère complexe modulo q, alors $L(s,\chi)$ n'a pas de zéro dans la zone $\sigma \geq 1 - \frac{c_1}{\log(q|t|+2)}$.
- Si χ est un caractère réel non principal, $L(s,\chi)$ a dans la zone ci-dessus au plus un zéro, qui est alors simple et réel. De plus $\forall\varepsilon$, $\exists c_2(\varepsilon)$, $\beta>1-c_2(\varepsilon)q^{-\varepsilon} \Rightarrow L(\beta,\chi) \neq 0$.

On va d'abord chercher à majorer $\frac{L'}{L}(s,\chi)$. Pour cela le lemme classique suivant sera utile:

Lemme 2. *Soit* f *une fonction holomorphe dans le disque* $\{|s - s_0| \leq r\}$ *et telle que*

$|s-s_0|\le r \Rightarrow |\frac{f(s)}{f(s_0)}|<e^M$ $(M>1)$.

On suppose $|\frac{f'(s_0)}{f(s_0)}|<\frac{M}{r}$ et $f(s)\neq 0$ sur $\{|s-s_0|\le r\}\cap\{\sigma\ge\sigma_0-2r'\}$, où $0<r'<\frac{r}{4}$.

Alors $|\frac{f'(s)}{f(s)}|<A\frac{M}{r}$ sur $\{|s-s_0|\le r'\}$.

Preuve : cf [24] page 57.

Lemme 3. *Pour $\frac{1}{2}\le\sigma\le 2$, $|t|\ge\frac{7}{2}$, on a $|L(s,\chi)|\ll\sqrt{q|t|}$.*

Preuve :

- $L(s,\chi)=\sum\limits_{a=1}^{q}\chi(a)(\sum\limits_{n=0}^{+\infty}(qn+a)^{-s})=q^{-s}\sum\limits_{a=1}^{q}\chi(a)(\sum\limits_{n=0}^{+\infty}(n+\frac{a}{q})^{-s})=q^{-s}\sum\limits_{a=1}^{q}\chi(a)\zeta(s,\frac{a}{q})$ où $\zeta(s,\omega)$ est la fonction zêta de Hürwitz, définie pour $\omega>0$ par $\zeta(s,\omega)=\sum\limits_{n=0}^{+\infty}(n+\omega)^{-s}$.
- Or $\zeta(s,\omega)-\omega^{-s}=\frac{1}{(s-1)(m+\omega)^{s-1}}+\sum\limits_{n=1}^{m}\frac{1}{(n+\omega)^s}-s\int\limits_m^\infty\frac{u-\lfloor u\rfloor}{(u+\omega)^{s+1}}du$

  $$=O(t^{-1}m^{1-\sigma})+O(\sum_{n=1}^{m}n^{-\sigma})+O(t\int_m^\infty u^{-\sigma-1}du)$$
  $$=O(t^{-1}m^{1/2})+O(m^{1/2})+O(tm^{-1/2}).$$

  Donc $|\zeta(s,\omega)-\omega^{-s}|\ll\sqrt{t}$, en prenant $m=\lfloor t\rfloor$.

  Par conséquent $L(s,\chi)=q^{-s}\sum\limits_{a=1}^{q}\chi(a)(\frac{q}{a})^s+q^{-s}\sum\limits_{a=1}^{q}O(\sqrt{t})$

  $=\sum\limits_{a=1}^{q}O(a^{-1/2})+O(q^{1-\sigma}t^{1/2})$, d'où le résultat.

Lemme 4. *$\exists c_3$, $\forall t$, $|t|\ge 4$, $\forall\sigma$, $1-\frac{c_3}{\log q|t|}\le\sigma\le 2$, $\frac{L'(s,\chi)}{L(s,\chi)}\ll\log q|t|$.*

Preuve :

- Soit $s_0=1+\frac{c_9}{4\log(q|t_0|)}+it_0$, $|t_0|\ge 4$, où c_9 est tel que $\{|t|\ge 4,\ \sigma\ge 1-\frac{c_9}{\log q|t|}\}$ soit une zone sans zéro.

  Le disque $\{|s-s_0|\le\frac{1}{2}\}$ appartient à la région $\{\sigma\ge\frac{1}{2},\ |t|\ge\frac{7}{2}\}$.

  $|\frac{1}{L(s_0,\chi)}|\le\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^{\sigma_0}}$, car $\sigma>1\Rightarrow\frac{1}{L(s,\chi)}=\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\mu(n)\chi(n)n^{-s}$.

  $\ll\frac{1}{\sigma_0-1}\ll\frac{\log(q|t_0|)}{c_9}$.
- Or, d'après le lemme 7, $|L(s,\chi)|\ll\sqrt{q|t|}$ pour $\frac{1}{2}\le\sigma\le 2$, $|t|\ge\frac{7}{2}$.

  Donc dans $\{|s-s_0|\le\frac{1}{2}\}$, on a $|\frac{L(s,\chi)}{L(s_0,\chi)}|\ll\frac{\log(q|t_0|)}{c_9}\sqrt{q|t|}$.

  D'où $\exists c_{10}$, $|\frac{L(s,\chi)}{L(s_0,\chi)}|<\exp(c_{10}\log q|t_0|)$.

  De plus $|\frac{L'}{L}(s_0,\chi)|=|\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\chi(n)\Lambda(n)n^{-s_0}|\le\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\Lambda(n)n^{-\sigma_0}=\frac{\zeta'}{\zeta}(\sigma_0)\ll\frac{1}{\sigma_0-1}$.

  Donc $\exists c_{11}$, $|\frac{L'(s_0,\chi)}{L(s_0,\chi)}|<c_{11}\log(q|t_0|)$.
- On applique maintenant le lemme 6, avec $\begin{cases}M=\max(c_{10},c_{11})\log(q|t_0|),\\ r=\frac{1}{2},\\ r'=\frac{c_9}{2\log(q|t_0|)}\end{cases}$

  (quitte à diminuer c_9, on peut supposer que pour tout q et pour $|t_0|\ge 4$, on a $r'<\frac{r}{4}$).

  On a $\sigma_0-2r'=1-\frac{3}{4}\frac{c_9}{\log(q|t_0|)}$.

  Donc $\sigma_0-2r'>1-\frac{c_9}{\log(q(|t_0|+\frac{1}{2}))}\Leftrightarrow(q|t_0|)^{4/3}>q(|t_0|+\frac{1}{2}\Leftrightarrow q^{1/3}>|t_0|^{-1/3}+\frac{1}{2}|t_0|^{-4/3}$,

ce qui est vrai pour tout q et tout t_0 tel que $|t_0| \geq 4$, car $1 > 4^{-1/3} + \frac{1}{2}4^{-4/3}$.
d'où $L(s,\chi) \neq 0$ sur $\{\sigma \geq \sigma_0 - 2r'\} \cap \{|s - s_0| \leq r\}$.
Finalement, d'après le lemme en question, $\frac{L'}{L}(\sigma + it_0) = O(\log(q|t_0|))$,
pour $1 - \frac{c_9}{4\log(q|t_0|)} \leq \sigma \leq 1 + \frac{3c_9}{4\log q|t_0|}$.
Dans la zone restante, $\frac{L'}{L}(s,\chi)$ se majore comme $\frac{L'}{L}(s_0,\chi)$ ci-dessus.
Le lemme s'en déduit en prenant $c_3 = \frac{1}{4}c_9$.

Il reste à majorer $\frac{L'}{L}(s,\chi)$ pour $|t| \leq 4$.

Lemme 5. *Soit χ un caractère non principal modulo q.*
On suppose que $L(s,\chi)$ n'a pas de zéro pour $\sigma \geq 1 - \delta$, $|t| \leq \frac{9}{2}$ (avec $\delta < 6$).
Alors $|\frac{L'}{L}(s,\chi)| \ll \frac{1}{\delta} + \log q$, pour $\sigma \geq 1 - \frac{\delta}{4}$, $|t| \leq 4$.

PREUVE : Soit $s_0 = 1 + \frac{\delta}{2} + it$, avec $|t| \leq 4$.
$L(s,\chi)$ est holomorphe sur $\mathbf{C}$ car χ est non principal. Dans le disque $\{|s - s_0| \leq \frac{1}{2}\}$ on a:

- $|\frac{L'}{L}(s_0,\chi)| \leq \frac{\zeta'}{\zeta}(\sigma_0) < \frac{A}{\sigma_0 - 1} = \frac{2A}{\delta}$.
- $L(s,\chi) = s \int\limits_{\frac{1}{2}}^{+\infty} (\sum\limits_{n \leq y} \chi(n)) y^{-s-1} dy$ (en sommant par parties).

Donc $|L(s,\chi)| \ll q$ (pour $\sigma \geq 2$, $|L(s,\chi)| \leq \zeta(\sigma) \leq \zeta(2)$, et sinon s reste borné).

De plus
$$\begin{cases} \text{si } \chi^2 \neq \chi_0,\ L(s,\chi)^{-1} \ll \mathcal{L}^7,\ (\sigma \geq 1), \text{ où } \mathcal{L} = \log(q + |t| + 1). \\ \text{si } \chi^2 = \chi_0,\ L(s,\chi)^{-1} \ll \begin{cases} q & \text{pour } |t| \leq c_{12} q^{-1} (\log 2q)^{-2}, \\ \mathcal{L}^6(\mathcal{L} + |t|^{-1}) & \text{pour } |t| > c_{12} q^{-1} (\log 2q)^{-2}. \end{cases} \end{cases}$$
où c_{12} est une constante absolue (cf [23] page 289 et 292).
Donc $|L(s_0,\chi)|^{-1} \ll_\varepsilon q^{1+\varepsilon} \Rightarrow |\frac{L(s,\chi)}{L(s_0,\chi)}| < B(\varepsilon) q^{1+\varepsilon}$.
On peut donc appliquer le lemme 6 avec $r = \frac{1}{2}$, $r' = \frac{3\delta}{4}$ ($< \frac{r}{4}$, car $\delta < \frac{1}{6}$)
et $M = \frac{A}{\delta} + (1 + \varepsilon)\log q + \log B(\varepsilon)$ ($\Rightarrow \sigma_0 - 2r' = 1 - \delta$).
D'où $|\frac{L'}{L}(s,\chi)| \ll \frac{1}{\delta} + \log q$.

a) Dans le cas général

Pour un caractère χ non principal, on a obtenu:

- Si $|t| \geq 4$, $\sigma \geq 1 - \frac{c_3}{\log(q|t|)}$, $|\frac{L'}{L}(s,\chi)| \ll \log q|t|$,
- Si $|t| \leq 4$, $\sigma \geq 1 - c_4(\varepsilon) q^{-\varepsilon}$, $|\frac{L'}{L}(s,\chi)| \ll_\varepsilon q^\varepsilon$ (cf lemme 9),

avec $c_4(\varepsilon) = \frac{c_{13}(\varepsilon)}{4}$ suffisamment petit pour avoir $\begin{cases} \forall q, 1 - c_{13}(\varepsilon) q^{-\varepsilon} > 1 - \frac{c_1}{\log(4q+2)}. \\ \forall q, c_{13}(\varepsilon) q^{-\varepsilon} < \frac{1}{6}. \end{cases}$

On définit le chemin Γ par $\begin{cases} |t| < 4 \Rightarrow \sigma = 1 - c_5(\varepsilon) q^{-\varepsilon}, \\ |t| > 4 \Rightarrow \sigma = 1 - \frac{c_3}{\log q|t|}, \\ |t| = 4 \Rightarrow 1 - \frac{c_3}{\log 4q} \leq \sigma \leq 1 - c_5(\varepsilon) q^{-\varepsilon}, \end{cases}$

où $c_5(\varepsilon) = \min(c_4(\varepsilon), c_3 \min\limits_{q=1,2,\ldots} \frac{q^\varepsilon}{\log 4q})$, de façon à avoir $\forall q$, $1 - c_5(\varepsilon) q^{-\varepsilon} \geq 1 - \frac{c_3}{\log 4q}$.

Lemme 6. *Sur Γ on a* $\begin{cases} \frac{1}{L(s,\chi)} = O(\log q|t|) & \textit{pour } |t| > 4. \\ \frac{1}{L(s,\chi)} = O_\varepsilon(q^\varepsilon) & \textit{pour } |t| \leq 4. \end{cases}$

PREUVE :

- Si χ est un caractère non principal, soit $\begin{cases} s_1 = \sigma_1 + it_1 \in \Gamma, \\ s_2 = 2 - \sigma_1 + it_1. \end{cases}$

  D'après les lemmes 8 (pour $|t|>4$) et 9 (pour $|t| \leq 4$), on a $\forall s \in [s_1,s_2]$, $\frac{L'(s,\chi)}{L(s,\chi)} = O(\frac{1}{1-\sigma_1})$.

  Donc $|\log \frac{L(s_2,\chi)}{L(s_1,\chi)}| = |\int\limits_{s_1}^{s_2} \frac{L'(s,\chi)}{L(s,\chi)} ds| = O(|s_2 - s_1| \frac{1}{1-\sigma_1}) = O(1)$.

  Par conséquent $\frac{1}{L(s_1,\chi)} = O(\frac{1}{L(s_2,\chi)}) \ll \sum\limits_{n=1}^{+\infty} n^{-2+\sigma_1}$, d'où le résultat.
- Si χ est un caractère principal, le résultat découle de propriétés classiques de la fonction zêta. En effet $L(s,\chi_0) = \zeta(s) \prod\limits_{p|q} (1 - p^{-s})$.

  On a $\begin{cases} |\frac{1}{\zeta(s)}| \ll \log |t| & \text{pour } \sigma \geq 1 - \frac{c_3}{\log q|t|},\ |t| \geq 4 \text{ (cf [23] page 178).} \\ |\frac{1}{\zeta(s)}| \sim |s-1| \ll_\varepsilon q^\varepsilon & \text{pour } |t| \leq 4,\ \sigma = 1 - c_5(\varepsilon) q^{-\varepsilon}. \end{cases}$

  Reste à minorer $\prod\limits_{p|q} (1 - p^{-s})$.

  On a $|\prod\limits_{p|q} (1 - p^{-s})| \geq \prod\limits_{p|q} (1 - p^{-\sigma})$.

  Or $\frac{p^{-\sigma}-1}{p-1} = \sigma \xi^{\sigma-1}$, avec $\xi \in]1,p[$ (d'après le théorème des accroissements finis),

  Donc $1 - p^{-\sigma} = \frac{p^\sigma - 1}{p^\sigma} \geq \frac{\sigma p^{\sigma-1}(p-1)}{p^\sigma} = \sigma(1 - \frac{1}{p})$

  $\Rightarrow |\prod\limits_{p|q} (1 - p^{-s})| \geq \prod\limits_{p|q} (\sigma(1 - \frac{1}{p})) = \sigma^{\sum\limits_{p|q} 1} \prod\limits_{p|q} (1 - \frac{1}{p}) \geq \sigma^{\omega(q)} \prod\limits_{p \leq q} (1 - \frac{1}{p})$,

  où $\omega(n)$ désigne le nombre de facteurs premiers distincts de n.

  En utilisant la formule de Mertens et la majoration $\omega(q) \leq \frac{\log q}{\log 2}$ (car $2^{\omega(q)} \leq q$), on trouve $|\prod\limits_{p|q} (1 - p^{-s})|^{-1} \ll \sigma^{-\frac{\log q}{\log 2}} \log q$.

  - Pour $|t| \geq 4$, $\sigma^{-\frac{\log q}{\log 2}} \leq (1 - \frac{c_3}{\log q|t|})^{-\frac{\log q}{\log 2}} = e^{-\frac{\log q}{\log 2} \log(1 - \frac{c_3}{\log q|t|})}$.

    $\exists c_{14}$, $\log(1 - \frac{c_3}{\log q|t|}) \geq -\frac{c_{14}}{\log q|t|}$, donc $\sigma^{-\frac{\log q}{\log 2}} \leq e^{\frac{c_{14}}{\log 2} \frac{\log q}{\log q|t|}} = O(1)$.
  - Pour $|t| \leq 4$, $\sigma^{-\frac{\log q}{\log 2}} \leq (1 - c_5(\varepsilon) q^{-\varepsilon})^{-\frac{\log q}{\log 2}} = e^{-\frac{\log q}{\log 2} \log(1 - c_5(\varepsilon) q^{-\varepsilon})}$

    $\leq e^{-\frac{c_{15}}{\log 2} q^{-\varepsilon} \log q} = O(1)$.

  D'où $|\prod\limits_{p|q} (1 - p^{-s})|^{-1} \ll \log q$ et le lemme.

b) S'il n'y a pas de zéro de Siegel

Pour un caractère χ non principal, on a obtenu:

- Si $|t| \geq 4$, $\sigma \geq 1 - \frac{c_3}{\log q|t|}$, $|\frac{L'}{L}(s,\chi)| \ll \log q|t|$.
- Si $|t| \leq 4$, $\sigma \geq 1 - \frac{c_6}{\log 4q}$, $|\frac{L'}{L}(s,\chi)| \ll \log q$ (cf lemme 9),

avec $c_6 = \frac{c_{16}}{4}$ suffisamment petit pour avoir $\begin{cases} \forall q, 1 - \frac{c_{16}}{\log 4q} > 1 - \frac{c_1}{\log(4q+2)} \\ \forall q, \frac{c_{16}}{\log 4q} < \frac{1}{6} \end{cases}$

On prend cette fois le chemin Γ défini par $\begin{cases} |t|<4 \Rightarrow \sigma = 1 - \frac{c_3}{\log 4q}, \\ |t| \geq 4 \Rightarrow \sigma = 1 - \frac{c_3}{\log q|t|}. \end{cases}$

Lemme 7. *Sur* Γ, *on a* $\begin{cases} \frac{1}{L(s,\chi)} = O(\log q|t|) & \textit{pour } |t| \geq 4, \\ \frac{1}{L(s,\chi)} = O(\log q) & \textit{pour } |t| \leq 4. \end{cases}$

PREUVE : cf celle du lemme 10.

Pour χ principal et $|t| \leq 4$, $\sigma^{-\frac{\log q}{\log 2}} \leq e^{-\frac{\log q}{\log 2} \log(1 - \frac{c_3}{\log 4q})} \leq e^{-\frac{c_{17}}{\log 2} \frac{\log q}{\log 4q}} = O(1)$.

c) Avec l'hypothèse de Riemann généralisée (GRH)

On utilise les deux théorèmes d'analyse complexe suivants:

Théorème 1. (Borel-Carathéodory) *(appelé aussi lemme de la partie réelle)*
On suppose f holomorphe dans le disque $\{|s-s_0| \leq R\}$, et $\sup\limits_{|z|=R} \Re e f(s) = K$.

Alors pour tout r, $0<r<R$, on a $\sup\limits_{|s|\leq r} |f(s) - f(s_0)| \leq \frac{2r}{R-r}(K - \Re e f(s_0))$.

DÉMONSTRATION : cf [13] page 119.

Théorème 2. (Hadamard) *(appelé théorème des trois cercles)*
Soit f holomorphe sur la couronne $0<r_1 \leq |z| \leq r_2$.
Soit $M(r) = \max\limits_{|z|=r} |f(z)|$, pour $r_1 \leq r \leq r_2$.
Alors $\log M(r)$ est une fonction convexe de $\log r$, c'est-à-dire:
$\forall r \in [r_1,r_2]$, $\log(\frac{r_2}{r_1}) \log M(r) \leq \log(\frac{r_2}{r}) \log M(r_1) + \log(\frac{r}{r_1}) \log M(r_2)$,
ou $\forall r \in [r_1,r_2]$, $M(r) \leq M(r_1)^{1-a(r)} M(r_2)^{a(r)}$, *avec* $a(r) = \frac{\log(\frac{r}{r_1})}{\log(\frac{r_2}{r})}$.

DÉMONSTRATION : cf [13] page 124.

Lemme 8. *Si χ n'est pas principal, on a, uniformément pour $\frac{1}{2}<\sigma_0 \leq \sigma \leq 1$:*
$\forall \varepsilon$, $\log L(s,\chi) \ll_{\sigma_0} (\log(q(|t|+2)))^{2-2\sigma+\varepsilon}$.

PREUVE :

- On applique le théorème de Borel-Carathéodory à la fonction $\log L(s,\chi)$ et aux cercles de centre $s_0 = 2+it$ et de rayons respectifs $R = \frac{3}{2} - \frac{\delta}{2}$ et $r = \frac{3}{2} - \delta$, où $0<\delta<\frac{1}{2}$ et $|t| \geq 4$.
  Sur le plus grand cercle, on a $\Re e(\log L(s,\chi)) = \log |L(s,\chi)| < A \log(q(|t|+2))$,
  car $L(s,\chi) = s \int\limits_{\frac{1}{2}}^{\infty} (\sum\limits_{n \leq y} \chi(n)) y^{s-1} dy = O(q|s|)$.
  Donc pour $|s - s_0| \leq r$, $|\log L(s,\chi) - \log L(s_0,\chi)| \leq \frac{3-2\delta}{\frac{1}{2}\delta}(A \log(q(|t|+2)) - \Re e \log L(s_0,\chi))$
  $\Rightarrow |\log L(s,\chi)| \leq \frac{3-2\delta}{\frac{1}{2}\delta} A \log(q(|t|+2)) + \frac{3-2\delta}{\frac{1}{2}\delta}(\underbrace{-\Re e \log L(s_0,\chi)}_{\leq |\log L(s_0,\chi)|}) + |\log L(s_0,\chi)|$
  $$\leq \frac{3-2\delta}{\frac{1}{2}\delta} A \log(q(|t|+2)) + \frac{3-\frac{3}{2}\delta}{\frac{1}{2}\delta} |\log(L(2+it,\chi))|,$$
  avec $|\log(L(2+it,\chi))| = |\sum\limits_{n=2}^{+\infty} \frac{\chi(n)\Lambda(n)}{(\log n) n^{2+it}}| \leq \sum\limits_{n=2}^{+\infty} \frac{\Lambda(n)}{(\log n) n^2} = \log \zeta(2)$.
  Donc $|\log L(s,\chi)| \leq \frac{A}{\delta} \log(q(|t|+2))$.
- On suppose $\frac{1}{2}<\frac{1}{2}+\delta<1<1+\eta<\sigma_1$. Pour $\sigma \in [\frac{1}{2}+\delta,1]$, on applique le théorème des trois cercles aux cercles $\mathcal{C}_1$, $\mathcal{C}_2$ et $\mathcal{C}_3$ de centre $\sigma_1 + it$ et passant respectivement par $1+\eta+it$, $\sigma+it$ et $\frac{1}{2}+\delta+it$ (ie de rayons $r_1 = \sigma_1 - 1 - \eta$, $r_2 = \sigma_1 - \sigma$ et $r_3 = \frac{1}{2} + \delta + it$).
  On pose $M_i = \sup\limits_{\mathcal{C}_i} |\log L(s,\chi)|$. Alors $M_2 \leq M_1^{1-a} M_3^a$, avec $a = \frac{\log(\frac{r_2}{r_1})}{\log(\frac{r_3}{r_1})} = \frac{\log(1+\frac{1+\eta-\sigma}{\sigma_1-1-\eta})}{\log(1+\frac{1/2+\eta-\delta}{\sigma_1-1-\eta})}$.
  d'où $a = \frac{1+\eta-\sigma}{\frac{1}{2}+\eta-\delta} + O(\frac{1}{\sigma_1}) = 2 - 2\sigma + O(\delta) + O(\eta) + O(\frac{1}{\sigma_1})$.
  On a déjà $M_3 < \frac{A}{\delta} \log(q(|t|+2))$, et, comme $\log L(s,\chi) = \sum\limits_{n=2}^{+\infty} \frac{\chi(n)\Lambda(n)}{n^s \log n}$, on a:

$M_1 \leq \max_{x\geq 1+\eta}(\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{\Lambda(n)}{n^x \log n}) \leq \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n^{1+\eta}} < \frac{A}{\eta}$ (quitte à augmenter A). Donc:

$|\log L(\sigma+it,\chi)| < (\frac{A}{\eta})^{1-a}(\frac{A\log(q(|t|+2))}{\delta})^a < \frac{A}{\eta^{1-a}\delta^a}(\log(q(|t|+2)))^{2-2\sigma+O(\delta)+O(\eta)+O(\frac{1}{\sigma_1})}$.

- $\forall q$, $\exists t_0(q)$, $\forall t$, $|t| \geq t_0(q) \Rightarrow \frac{1}{2} < \frac{1}{2} + \frac{1}{\log\log(q(|t|+2))} < \sigma_0 < 1 < 1 + \frac{1}{\log\log(q(|t|+2))}$.

  De plus $\exists q_0$, $\forall q \geq q_0$, on peut prendre $t_0(q) = 0$.

  Pour tout q et tout t tel que $|t| \geq t_0(q)$, on prend $\sigma_1 = \frac{1}{\delta} = \frac{1}{\eta} = \log\log(q(|t|+2))$.

  Comme $(\log(q(|t|+2)))^{O(\sigma)+O(\eta)+O(\frac{1}{\sigma_1})} = O(1)$, on obtient:

  $\forall q$, $\forall |t| \geq t_0(q)$, $\forall \chi$ mod q, $\log L(s,\chi) = O((\log(q(|t|+2)))^{2-2\sigma}\log\log(q(|t|+2)))$ pour $\frac{1}{2} + \frac{1}{\log\log(q(|t|+2))} \leq \sigma \leq 1$ et à fortiori pour $\sigma_0 \leq \sigma \leq 1$.

  Pour chaque $q < q_0$, $\log L(s,\chi)$ est borné sur $\{|t| \leq t_0(q),\ \sigma_0 \leq \sigma \leq 1\}$, d'où le résultat.

Lemme 9. $|\frac{1}{L(s,\chi)}| \ll_{\varepsilon,\sigma_0} (q(|t|+2))^{\varepsilon}$ *pour* $\frac{1}{2} < \sigma_0 = \sigma$.

PREUVE : Soit $\sigma_0 > \frac{1}{2}$ fixé.

- Si χ n'est pas principal, on a $2 - 2\sigma_0 + \eta < 1$ pour η assez petit.

  Donc d'après le lemme 12, on a $\log|L(s,\chi)| \ll_{\sigma_0} (\log(q(|t|+2)))^{2-2\sigma_0+\eta(\sigma_0)}$ sur $\{\sigma = \sigma_0\}$.

  Soit $\varepsilon > 0$. $\exists t_0(\varepsilon,\sigma_0)$, $|t| \geq t_0(\varepsilon,\sigma_0) \Rightarrow -\varepsilon\log(q(|t|+2)) < \log|L(s,\chi)| < \varepsilon\log(q(|t|+2))$.

  d'où $|\frac{1}{L(s,\chi)}| \ll_{\varepsilon,\sigma_0} (q(|t|+2))^{\varepsilon}$.
- Si χ est principal (il y a un pôle en 1), on a $L(s,\chi) = \zeta(s)\prod_{p|q}(1-p^{-s})$.

  En appliquant la même méthode que précédemment, on trouve:

  $|\log\zeta(s)| \ll_{\sigma_0} (\log(|t|+2))^{2-2\sigma_0+\varepsilon}$ sur $\{\sigma = \sigma_0, |t| \geq 2\}$.

  $\varepsilon > 0$ et $\sigma_0 > 0$ étant fixés, on a $\frac{1}{\zeta(s)} \ll_{\varepsilon,\sigma_0} (|t|+2)^{\varepsilon}$ pour $\sigma = \sigma_0$.

  Reste à minorer le facteur $\prod_{p|q}(1-p^{-s})$.

  Soit ξ tel que $\frac{\log 2}{\log \xi} < \varepsilon$. On a:

  $$|\prod_{p|q}(1-p^{-s})| \geq \prod_{p|q}(1-p^{-\sigma}) \geq \prod_{p|q}(1-\frac{1}{\sqrt{p}}) \geq \underbrace{\prod_{p<\xi}(1-\frac{1}{\sqrt{p}})}_{K(\varepsilon)} \prod_{\substack{p|q \\ p\geq\xi}}(1-\frac{1}{\sqrt{p}})$$

  Or $\frac{1-\frac{1}{\sqrt{p}}}{1-\frac{1}{p}} = \frac{1}{2\sqrt{\theta}}$ avec $\theta \in]\frac{1}{p},1[$, d'après le théorème des accroissements finis, donc:

  $|\prod_{p|q}(1-p^{-s})| \geq K(\varepsilon)(\prod_{\substack{p|q \\ p\geq\xi}}(1-\frac{1}{p}))(\frac{1}{2})^{\sum_{\substack{p|q \\ p\geq\xi}} 1}$. Or $\sum_{\substack{p|q \\ p\geq\xi}} 1 \leq \frac{\log q}{\log \xi}$ car $\xi^{\sum_{\substack{p|q \\ p\geq\xi}} 1} \leq q$, donc:

  $$|\prod_{p|q}(1-p^{-s})| \geq K(\varepsilon)(\tfrac{1}{2})^{\frac{\log q}{\log \xi}} \prod_{\substack{p|q \\ p\geq\xi}}(1-\tfrac{1}{p}) \geq K(\varepsilon)(\tfrac{1}{q})^{\frac{\log 2}{\log \xi}} \prod_{p\leq q}(1-\tfrac{1}{p}) \geq \frac{K(\varepsilon)}{q^{\varepsilon}} \underbrace{\prod_{p\leq q}(1-\frac{1}{p})}_{\sim\frac{e^{-\gamma}}{\log q}}$$

  car $\frac{\log 2}{\log \xi} < \varepsilon$. Donc $|\prod_{p|q}(1-p^{-s})|^{-1} \ll_{\varepsilon} q^{\varepsilon}$ sur $\{\sigma = \sigma_0\}$, d'où le lemme.

2. Majoration de $\sum_{\substack{n\le x\\ n\equiv a \mod q}} \mu(n)$

On utilise la formule de Perron effective sous la forme suivante:

Théorème 3. *Soit* $f(s)=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{a_n}{n^s}$ *($\sigma>1$), avec* $a_n=O(\psi(n))$*, où* $\psi(n)$ *est croissante.*

On suppose de plus $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{|a_n|}{n^\sigma}=O(\frac{1}{(\sigma-1)^\alpha})$ *quand* $\sigma\to 1$.

Alors si $c>1$, $x\notin\mathbf{N}$ *et si* N *est l'entier le plus proche de* x*, on a:*

$$\sum_{n<x}a_n=\frac{1}{2i\pi}\int_{c-iT}^{c+iT}f(\omega)\frac{x^\omega}{\omega}d\omega+O(\frac{x^c}{T(c-1)^\alpha})+O(\frac{\psi(2x)x\log x}{T})+O(\frac{\psi(N)x}{T|x-N|}).$$

DÉMONSTRATION : cf [24] page 60 (avec $s=0$).

Pour $\Re es>1$, on a $\sum_{n=1}^{+\infty}\mu(n)\chi(n)n^{-s}=\frac{1}{L(s,\chi)}$. Donc avec x demi-entier, $\alpha=\psi(n)=1$, on a:

$$|\sum_{n\le x}\mu(n)\chi(n)-\frac{1}{2i\pi}\int_{c-iT}^{c+iT}\frac{x^s ds}{sL(s,\chi)}|\ll\frac{x^c}{T(c-1)}+\frac{x\log x}{T}.$$

a) Dans le cas général

Lemme 10. *Si* $(a,q)=1$, $\lambda>0$, $\exists c(\lambda)$, $\sum_{\substack{n\le x\\ n\equiv a \bmod q}}\mu(n)\ll xe^{-c(\lambda)\sqrt{\log x}}$ *pour* $q\le(\log x)^\lambda$.

PREUVE :

- On utilise la formule de Perron en déplaçant le contour jusqu'en Γ (défini en 1.a).

$$|\sum_{n\le x}\mu(n)\chi(n)|\le|\frac{1}{2i\pi}\int_{\substack{\Gamma\\ |t|\le T}}\frac{x^s ds}{sL(s,\chi)}|+|\frac{1}{2i\pi}\int_{[1-\frac{c_3}{\log qT}+iT,c+iT]}\frac{x^s ds}{sL(s,\chi)}|$$
$$+|\frac{1}{2i\pi}\int_{[1-\frac{c_3}{\log qT}-iT,c-iT]}\frac{x^s ds}{sL(s,\chi)}|+\frac{x^c}{T(c-1)}+\frac{x\log x}{T}.$$

  - $|\int_{\substack{\Gamma\\ 4<|t|\le T}}\frac{x^s ds}{sL(s,\chi)}|\ll\int_{\substack{\Gamma\\ 4<|t|\le T}}\frac{x^\sigma}{|s|}\log q|t|ds\le\int_{4\le|t|\le T}\frac{x^{1-\frac{c_3}{\log qT}}\log q|t|}{|t|}dt\le(\log qT)^2x^{1-\frac{c_3}{\log qT}}$.
  - $|\int_{\substack{\Gamma\\ |t|\le 4}}\frac{x^s ds}{sL(s,\chi)}|\ll_\varepsilon\int_{\substack{\Gamma\\ |t|\le 4}}\frac{x^\sigma}{|s|}q^\varepsilon ds\le q^\varepsilon\int_{|t|\le 4}\frac{x^{1-c_5(\varepsilon)q^{-\varepsilon}}}{1-c_5(\varepsilon)q^{-\varepsilon}}dt\ll q^\varepsilon x^{1-c_5(\varepsilon)q^{-\varepsilon}}$.
  - $|\int_{[1-\frac{c_3}{\log qT}\pm iT,c\pm iT]}\frac{x^s ds}{sL(s,\chi)}|\le(c-\frac{c_3}{\log qT})\frac{x}{T}\log qT\ll\frac{cx\log qT}{T}+\frac{x}{T}$.

  Donc $|\sum_{n\le x}\mu(n)\chi(n)|\ll_\varepsilon(\log qT)^2x^{1-\frac{c_3}{\log qT}}+q^\varepsilon x^{1-c_5(\varepsilon)q^{-\varepsilon}}+\frac{cx\log qT}{T}+\frac{x\log x}{T}+\frac{x^c}{T(c-1)}$.

- On prend c tel que $\frac{x^c}{c-1}\ll x\log x$: par exemple $c=1+\frac{1}{\log x}$ ($\Rightarrow\frac{x^c}{c-1}=e\log x$).
  On choisit q et T de manière à avoir $\log qT\ll\log x$, c'est-à-dire $qT\ll x$.
  Alors $|\sum_{n\le x}\mu(n)\chi(n)|\ll_\varepsilon\underbrace{(\log qT)^2x^{1-\frac{c_3}{\log qT}}}_{\text{fonction croissante de } qT}+\underbrace{q^\varepsilon x^{1-c_5(\varepsilon)q^{-\varepsilon}}}_{\text{fonction décroissante de } q}+\underbrace{\frac{x\log qT}{T}}_{\text{fonction décroissante de } T}$.

Si on suppose $q \leq (\log x)^\lambda$, en prenant $T = e^{\sqrt{\log x}}$, on obtient:
$|\sum_{n\leq x} \mu(n)\chi(n)| \ll_\varepsilon xe^{-c_{18}(\lambda)\sqrt{\log x}} + xe^{-c_{19}(\lambda,\varepsilon)(\log x)^{1-\lambda\varepsilon}} + xe^{-c_{20}(\lambda)\sqrt{\log x}}$,
ce qui est optimal d'après les propriétés de monotonie signalées précédemment.
On prend alors $c(\lambda) = \min(c_{18}(\lambda), c_{19}(\lambda, \frac{1}{2\lambda}), c_{20})$.

– Pour démontrer le lemme, il suffit maintenant d'utiliser les relations d'orthogonalité, valables pour $(a,q) = 1$: $\sum_{\chi \bmod q} \overline{\chi(a)}\chi(n) = \begin{cases} \phi(q) & \text{si } n \equiv a \bmod q. \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$
Ainsi $\sum_{\substack{n\leq x \\ n\equiv a \bmod q}} \mu(n) = \frac{1}{\phi(q)} \sum_{\chi \bmod q} \overline{\chi(a)} \sum_{n\leq x} \chi(n)\mu(n)$
$\Rightarrow |\sum_{\substack{n\leq x \\ n\equiv a \bmod q}} \mu(n)| \leq \frac{1}{\phi(q)} \sum_{\chi \bmod q} |\sum_{n\leq x} \chi(n)\mu(n)| \ll xe^{-c(\lambda)\sqrt{\log x}}$ pour $q \leq (\log x)^\lambda$.

Lemme 11. *On peut supprimer la condition $(a,q) = 1$ du lemme 14.*

PREUVE : Supposons $a = \delta a'$ et $q = \delta q'$ avec $\delta>1$ et $(a',q') = 1$.

Alors $\sum_{\substack{n\leq x \\ n\equiv a \bmod q}} \mu(n) = \mu(\delta) \sum_{\substack{n\leq \frac{x}{\delta} \\ n\equiv a' \bmod q' \\ (n,\delta)=1}} \mu(n)$.

On peut supposer δ sans facteur carré (sinon $\sum_{\substack{n\leq x \\ n\equiv a \bmod q}} \underbrace{\mu(n)}_{0} = 0$).

Soit $\delta' = \frac{\delta}{(\delta,q')}$. On a $(\delta',q') = 1$

On peut remplacer la condition $(n,\delta) = 1$ par $(n,\delta') = 1$. En effet:

– $\delta'|\delta \Rightarrow (n,\delta')|(n,\delta)$.
– (n,δ) et (δ,q') sont premiers entre eux. En effet, soit m un diviseur commun. On a $m|n$ et $m|q'$, donc $m|a'$ puis $m|(a',q') = 1$. Or $(n,\delta)|\delta = \delta'(\delta,q')$, donc $(n,\delta)|\delta'$, d'après le théorème de Gauss. Finalement $(n,\delta)|(n,\delta')$.

Par conséquent $\sum_{\substack{n\leq x \\ n\equiv a \bmod q}} \mu(n)$ peut s'écrire comme une somme de $\phi(\delta')$ termes de la forme $\mu(\delta) \sum_{\substack{n\leq \frac{x}{\delta} \\ n\equiv b \bmod \delta' q'}} \mu(n)$ avec $(b,\delta' q') = 1$, d'après le théorème chinois.

Pour $q \leq (\log x)^\lambda$, on a $\delta' q' \leq \delta q' = q \leq (\log \frac{x}{\delta})^{\lambda'}$ pour un certain $\lambda'>0$.

En effet $\delta \leq q \Rightarrow (\log x)^{\lambda'} \sim (\log \frac{x}{(\log x)^{\lambda'}})^{\lambda'} \leq (\log \frac{x}{\delta})^{\lambda'} \leq (\log x)^{\lambda'}$.

Donc $\sum_{\substack{n\leq x \\ n\equiv a \bmod q}} \mu(n) \ll \phi(\delta') \frac{x}{\delta} e^{-c(\lambda')\sqrt{\log \frac{x}{\delta}}} \ll xe^{-c'(\lambda)\sqrt{\log x}}$ en prenant $c'(\lambda)<c(\lambda')$.

b) S'il n'y a pas de zéro de Siegel

Lemme 12. *Si $(a,q) = 1$, $\forall c_7>0$, $\exists c_8>0$, $\sum_{\substack{n\leq x \\ n\equiv a \bmod q}} \mu(n) \ll xe^{c_8\sqrt{\log x}}$ pour $q \leq e^{c_7\sqrt{\log x}}$.*

PREUVE : On procède comme pour le lemme 10, avec le contour Γ défini en 1.b.

Le seul terme qui diffère est: $|\int_{\substack{\Gamma \\ |t|\leq 4}} \frac{x^s ds}{sL(s,\chi)}| \ll \int_{|t|\leq 4} x^{1-\frac{c_3}{\log 4q}} (\log q) dt \ll (\log q) x^{1-\frac{c_3}{\log 4q}}$.

Donc $|\sum_{n\leq x} \chi(n)\mu(n)| \ll (\log qT)^2 x^{1-\frac{c_3}{\log qT}} + (\log q) x^{1-\frac{c_3}{\log 4q}} + \frac{x\log x}{T}$.

On suppose $q \leq e^{c_7\sqrt{\log x}}$. En prenant $T = e^{\sqrt{\log x}}$, on trouve $|\sum_{n\leq x} \chi(n)\mu(n)| \ll xe^{-c_8\sqrt{\log x}}$, d'où le résultat comme dans le lemme 14.

Lemme 13. *On peut supprimer la condition $(a,q) = 1$ du lemme 16.*

PREUVE : cf celle du lemme 15.

c) Avec l'hypothèse de Riemann généralisée (GRH)

Lemme 14. *Pour tout caractère χ modulo q, on a* $|\sum_{n\le x}\chi(n)\mu(n)| \ll_\varepsilon x^{\frac12+\varepsilon}q^\varepsilon$.

PREUVE : On utilise à nouveau la formule de Perron effective.

Pour $c>1$, on a $|\sum_{n\le x}\mu(n)\chi(n) - \frac{1}{2i\pi}\int_{c-iT}^{c+iT}\frac{x^s\,ds}{sL(s,\chi)}| \ll \frac{x^c}{T(c-1)} + \frac{x\log x}{T} + \frac{x}{T}$. On prend $c=2$.

On déplace le contour d'intégration jusqu'à la droite $\{\sigma = \frac12+\delta\}$ ($\delta>0$), pour $|t|\le T$.

$$|\sum_{n\le x}\mu(n)\chi(n)| \le |\frac{1}{2i\pi}\int_{\frac12+\delta-iT}^{\frac12+\delta+iT}\frac{x^s\,ds}{sL(s,\chi)}|+|\frac{1}{2i\pi}\int_{[\frac12+\delta-iT,2-iT]}\frac{x^s\,ds}{sL(s,\chi)}|+|\frac{1}{2i\pi}\int_{[\frac12+\delta+iT,2+iT]}\frac{x^s\,ds}{sL(s,\chi)}|+\frac{x^2}{T}.$$

– $|\frac{1}{2i\pi}\int_{\frac12+\delta-iT}^{\frac12+\delta+iT}\frac{x^s\,ds}{sL(s,\chi)}| \ll_{\varepsilon,\delta} x^{\frac12+\delta}q^\varepsilon\int_{-T}^{T}\frac{(2+|t|)^\varepsilon\,dt}{2+|t|} \ll x^{\frac12+\delta}q^\varepsilon T^\varepsilon$.

– $|\frac{1}{2i\pi}\int_{[\frac12+\delta\pm iT,2\pm iT]}\frac{x^s\,ds}{sL(s,\chi)}| \ll_{\varepsilon,\delta} \frac{x^2}{T}(qT)^\varepsilon$.

Donc $|\sum_{n\le x}\mu(n)\chi(n)| \ll_{\varepsilon,\delta} x^{\frac12+\delta}q^\varepsilon T^\varepsilon + \frac{x^2}{T}(qT)^\varepsilon$, d'où le résultat en prenant $\delta=\varepsilon$ et $T=x^2$.

Pour obtenir une majoration de $\sum_{\substack{n\le x\\ n\equiv a \bmod q}}\mu(n)$, même avec $(a,q)=1$, on a besoin du lemme auxiliaire suivant:

Lemme 15. *On suppose $q\le x$. Alors pour tout caractère χ modulo q', on a:*
$$\sum_{\substack{n\le x\\(n,q)=1}}\chi(n)\mu(n) \ll_\varepsilon x^{\frac12+\varepsilon}q'^\varepsilon q^\varepsilon.$$

PREUVE : Soient p_1, p_2,... les diviseurs premiers de q qui sont inférieurs à x.

- On peut supposer n sans facteur carré (sinon $\mu(n)=0$). D'après le lemme 18:
$$\sum_{\substack{n\le x\\(n,q)=1}}\mu(n)\chi(n) = \sum_{n\le x}\mu(n)\chi(n) - \sum_{\substack{n\le x\\(n,q)>1}}\mu(n)\chi(n) \ll_\varepsilon q'^\varepsilon x^{\frac12+\varepsilon} + |\sum_{\substack{n\le x\\(n,q)>1}}\mu(n)\chi(n)|.$$
- D'après la formule d'inclusion-exclusion (qui repose sur $(1-1)^k=0$), on a:
$$\sum_{\substack{n\le x\\(n,q)>1}}\mu(n)\chi(n) = \sum_{p|q}\sum_{l\le\frac{x}{p}}\mu(pl)\chi(pl) - \sum_{p_{i_1}|q,p_{i_2}|q}\sum_{l\le\frac{x}{p_{i_1}p_{i_2}}}(\chi\mu)(p_{i_1}p_{i_2}l)+\dots$$
$$+(-1)^{k+1}\sum_{p_{i_1}|q,\dots,p_{i_k}|q}\sum_{l\le\frac{x}{p_{i_1}\cdots p_{i_k}}}(\mu\chi)(p_{i_1}\dots p_{i_k}l)+\dots$$
les p_j étant supposés distincts. Il y a au plus $\log x$ termes dans cette somme et on a:
$$\sum_{p_{i_1}|q,\dots,p_{i_k}|q}\sum_{l\le\frac{x}{p_{i_1}\cdots p_{i_k}}}(\mu\chi)(p_{i_1}\dots p_{i_k}l) \ll \sum_{p_{i_1}|q,\dots,p_{i_k}|q}|\sum_{l\le\frac{x}{p_{i_1}\cdots p_{i_k}}}\mu(l)\chi(l)|$$
$$\ll_\varepsilon \sum_{p_{i_1}|q,\dots,p_{i_k}|q}\left(\frac{x}{p_{i_1}\cdots p_{i_k}}\right)^{\frac12+\varepsilon}q'^\varepsilon \text{ (lemme 18)}$$

$$\ll_\varepsilon x^{\frac{1}{2}+\varepsilon} q'^{\varepsilon} \sum_{p_{i_1}|q,\ldots,p_{i_k}|q} \left(\frac{1}{p_{i_1}\cdots p_{i_k}}\right)^{\frac{1}{2}+\varepsilon}$$
$$\ll_\varepsilon x^{\frac{1}{2}+\varepsilon} q'^{\varepsilon} \prod_{p|q} (1+\tfrac{1}{p^{1/2+\varepsilon}})$$
$$\ll_\varepsilon x^{\frac{1}{2}+\varepsilon} q'^{\varepsilon} \prod_{p|q} (1+\tfrac{1}{\sqrt{p}}).$$

– Soit ξ tel que $\frac{\log 2}{\log \xi}<\varepsilon$.

$\prod_{p|q}(1+\frac{1}{\sqrt{p}}) \leq \underbrace{\prod_{p<\xi}(1+\frac{1}{\sqrt{p}})}_{K(\varepsilon)} \prod_{\substack{p|q \\ p\geq\xi}} (1+\frac{1}{\sqrt{p}}) \leq K(\varepsilon) \prod_{\substack{p|q \\ p\geq\xi}} (2(1+\frac{1}{p}))$, car $\frac{1+\frac{1}{\sqrt{p}}}{1+\frac{1}{p}} \leq \frac{1+\frac{1}{\sqrt{2}}}{1} \leq 2$.

Donc $\prod_{p|q}(1+\frac{1}{\sqrt{p}}) \leq K(\varepsilon)(\prod_{\substack{p|q \\ p\geq\xi}} (1+\frac{1}{p}))2^{\sum_{\substack{p|q \\ p\geq\xi}} 1} \leq K(\varepsilon)(\prod_{p\leq q} (1+\frac{1}{p}))2^{\frac{\log q}{\log \xi}}$

$$\leq K(\varepsilon) q^{\frac{\log 2}{\log \xi}} \prod_{p\leq q} (1+\tfrac{1}{p}) \leq K(\varepsilon) q^{\varepsilon} \prod_{p\leq q} (1+\tfrac{1}{p}).$$

D'où le résultat en utilisant $\prod_{p\leq q}(1+\frac{1}{p}) \sim \frac{6e^\gamma}{\pi^2}\log q$ (cf [13] page 33).

Lemme 16. *Pour tout $q \leq x$, on a:* $\sum_{\substack{n\leq x \\ n\equiv a \bmod q}} \mu(n) \ll_\varepsilon x^{\frac{1}{2}+\varepsilon}$.

Preuve : Posons $a=\delta a'$, $q=\delta q'$ avec $(a',q')=1$. Comme dans le lemme 15, on a:
$$\sum_{\substack{n\leq x \\ n\equiv a \bmod q}} \mu(n) = \mu(\delta) \sum_{\substack{n\leq \frac{x}{\delta} \\ n\equiv a' \bmod q' \\ (n,\delta)=1}} \mu(n) = \mu(\delta)\frac{1}{\phi(q')} \sum_{\chi \bmod q'} \chi(a') \sum_{\substack{n\leq \frac{x}{\delta} \\ (n,\delta)=1}} \mu(n)\chi(n)$$

Donc d'après le lemme 19, $\sum_{\substack{n\leq x \\ n\equiv a \bmod q}} \mu(n) \ll_\varepsilon (\frac{x}{\delta})^{\frac{1}{2}+\varepsilon} q^\varepsilon \delta^\varepsilon$,

d'où le lemme car $\delta=(a,q)\leq q\leq x$.

Chapitre 4

Résultats et conclusion

1. Majorations de la somme $\sum\limits_{n\le x}\mu(n)e(\alpha n)$

En utilisant le lemme 5 et le théorème 4, on obtient:

$$\sum_{n\le x}\mu(n)e(n\alpha) \ll \begin{cases} (\delta+\frac{x}{Q})\max\limits_{n\le x}\max\limits_{r\le q}|\sum\limits_{\substack{m\le n\\ m\equiv r \bmod q}}\mu(m)| & \text{si } q\le\delta \\ (x\delta^{-\frac12}+x^{\frac12}Q^{\frac12}+x^{\frac56})(\log x)^3 & \text{si } \delta\le q\le Q \end{cases}$$

Théorème 1. *(i)* $\forall\lambda{>}0$, $\sum\limits_{n\le x}\mu(n)e(n\alpha)\ll\frac{x}{(\log x)^{\lambda}}$.

(ii) S'il n'y a pas de zéro de Siegel, $\exists c{>}0$, $\sum\limits_{n\le x}\mu(n)e(n\alpha)\ll xe^{-c\sqrt{\log x}}$.

(iii) Si l'hypothèse de Riemann généralisée est vraie, $\sum\limits_{n\le x}\mu(n)e(n\alpha)\ll_{\varepsilon} x^{\frac56+\varepsilon}$.

DÉMONSTRATION :

- Pour $q\le(\log x)^{\lambda}$, on a $\sum\limits_{\substack{n\le x\\ n\equiv a \bmod q}}\mu(n)\ll xe^{-c(\lambda)\sqrt{\log x}}$.

  On prend $\delta=(\log x)^{\lambda}$ et $Q=\frac{x}{(\log x)^{\lambda}}$.
  - Si $n\le xe^{-c(\lambda)\sqrt{\log x}}$, on a grossièrement $|\sum\limits_{\substack{m\le n\\ m\equiv r \bmod q}}\mu(m)|\ll xe^{-c(\lambda)\sqrt{\log x}}$.
  - Si $xe^{-c(\lambda)\sqrt{\log x}}\le n\le x$, on a $q\le\delta\Rightarrow q\le(\log n)^{\lambda'}$ pour un certain $\lambda'{>}0$.

    Donc $|\sum\limits_{\substack{m\le n\\ m\equiv r \bmod q}}\mu(m)|\ll ne^{-c(\lambda')\sqrt{\log n}}\ll xe^{-c(\lambda')\sqrt{\log x}}$.

  Finalement $\forall\lambda$, $\sum\limits_{n\le x}\mu(n)e(n\alpha)\ll\frac{x}{(\log x)^{\frac{\lambda}{2}-3}}$.
- S'il n'y a pas de zéro de Siegel, on a $\sum\limits_{\substack{n\le x\\ n\equiv a \bmod q}}\mu(n)\ll xe^{-c_8\sqrt{\log x}}$ pour $q\le e^{c_7\sqrt{\log x}}$.

  On prend $\delta=e^{c_{21}\sqrt{\log x}}$, où $c_{21}{>}0$, et $Q=xe^{-c_{21}\sqrt{\log x}}$.
  - Si $n\le xe^{-c_{21}\sqrt{\log x}}$, on a grossièrement $|\sum\limits_{\substack{m\le n\\ m\equiv r \bmod q}}\mu(n)|\ll xe^{-c_{21}\sqrt{\log x}}$.
  - Si $xe^{-c_{21}\sqrt{\log x}}\le n\le x$, on a $q\le\delta\Rightarrow q\le e^{c_7\sqrt{\log n}}$ pour un certain $c_7{>}0$.

    Donc $|\sum\limits_{\substack{m\le n\\ m\equiv r \bmod q}}\mu(n)|\ll ne^{-c_8\sqrt{\log n}}\ll xe^{-c_8\sqrt{\log x}}$.

D'où le résultat en prenant $c = \min(c_{21}, c_8)$.

– Si l'hypothèse de Riemann généralisée est vraie, on a $\sum_{\substack{n \leq x \\ n \equiv a \bmod q}} \mu(n) \ll_\varepsilon x^{\frac{1}{2}+\varepsilon}$ pour $q \leq x$.
On prend $\delta = x^{1/3}$ et $Q = x^{2/3}$.
  – Si $n \leq \sqrt{x}$, on a grossièrement $|\sum_{\substack{m \leq n \\ m \equiv r \bmod q}} \mu(n)| \ll \sqrt{x}$.
  – Si $\sqrt{x} \leq n \leq x$, on a $q \leq \delta \Rightarrow q \leq n$. Donc $|\sum_{\substack{m \leq n \\ m \equiv r \bmod q}} \mu(n)| \ll_\varepsilon n^{\frac{1}{2}+\varepsilon} \leq x^{\frac{1}{2}+\varepsilon}$.

Finalement $\sum_{n \leq x} \mu(n) e(n\alpha) \ll_\varepsilon x^{\frac{5}{6}+\varepsilon}$.

2. Conclusion

– On constate que pour majorer une somme $\sum_{n \leq x} f(n) e(n\alpha)$, où f est multiplicative, à l'aide de la méthode de Hardy-Littlewood, on a besoin de deux "ingrédients" principaux:

  – L'identité de Vaughan pour majorer sur les arcs mineurs: elle nécessite l'utilisation d'une inégalité du type $\sum_{n \leq x} |f(n)|^2 \ll x(\log x)^k$.
  – Un analogue du théorème de Siegel-Walfisz pour estimer les sommes du type $\sum_{\substack{n \leq x \\ n \equiv a \bmod q}} f(n)$ pour $q \leq (\log x)^\lambda$. Pour cela on utilise une majoration de la série de Dirichlet $L_f(s,\chi) = \sum_{n \leq x} \frac{f(n)}{n^s}$ correspondante.

– On retrouve ce même schéma dans [12], où il s'agit de majorer des sommes d'exponentielles du type $\sum_{n \leq x} y^{\Omega(n)} e(n\alpha)$, avec $0 \leq y < 2$.

  – Une majoration de $\zeta(s)^z$ et la formule de Perron effective permettent de montrer:

Lemme 1. *Il existe une constante $c>0$ absolue telle que, pour $|z| \leq 2-\delta$, $q \leq (\log x)^b$,*
on ait pour tout caractère χ modulo q non principal:
$$|\sum_{n \leq x} \chi(n) z^{\Omega(n)}| \ll_{\delta,b} x e^{-c\sqrt{\log x}}.$$

On a de plus le résultat suivant:

Lemme 2. *Si on a $|z| \leq 2-\delta$, $t \geq 1$ et $\log\log q = o(\frac{\log x}{\log\log x})$, alors:*
$$\sum_{\substack{n \leq x \\ (n,q)=1}} z^{\Omega(n)} = x \sum_{j=1}^{t} \lambda_j(z,q)(\log x)^{z-j} + O_{\delta,t}(x(\log x)^{z-t-1}(\log\log q)^{t+2}),$$
avec $|\lambda_j(z,q)| \ll_{\delta,j} (\log\log q)^{j+1}$.

ce qui permet d'obtenir une majoration de type Siegel-Walfisz:

Lemme 3. *Si $|z| \leq 2-\delta$, $t \geq 1$, $1 \leq q \leq (\log x)^b$, alors:*
$$\sum_{\substack{n \leq x \\ n \equiv a \bmod q}} z^{\Omega(n)} = \frac{x}{\phi(q)} \sum_{j=1}^{t} \lambda_j(z,q)(\log x)^{z-j} + O_{\delta,t,b}\left(\frac{x}{\phi(q)}(\log x)^{z-t-1}(\log\log q)^{t+2}\right).$$

- Pour estimer $\sum_{n\leq x} f(n)e(n\alpha)$ sur les arcs mineurs, on dispose d'un analogue de l'identité de Vaughan, qui donne un résultat semblable à celui du théorème 4.

En regroupant ces deux estimations, on obtient: $\sum_{n\leq x} y^{\Omega(n)}e(n\alpha) = o(\frac{x}{(\log x)^{y-1}})$ pour $y<2$.

- Comme on a l'estimation classique $\sum_{n\leq x} y^{\Omega(n)} = \{C(y) + O(\frac{1}{\log x})\}x(\log x)^{y-1}$, on obtient, pour tout α irrationnel et pour $0<y<2$: $\sum_{n\leq x} y^{\Omega(n)}e(n\alpha) = o(\sum_{n\leq x} y^{\Omega(n)})$, ce que H.Daboussi (cf [6]) a généralisé sous la forme suivante:

Théorème 2. *Soit f une fonction complètement multiplicative telle que, pour tout p premier, on ait $|f(p)| = y$ avec $0<y<2$.*
Alors pour tout α irrationnel on a: $\sum_{n\leq x} f(n)e(n\alpha) = o(\sum_{n\leq x} |f(n)|)$.

Le problème de savoir à quelle condition une fonction multiplicative f vérifie $\forall\alpha \in \mathbf{R}\setminus\mathbf{Q}$, $\sum_{n\leq x} f(n)e(n\alpha) = o(\sum_{n\leq x} f(n))$ reste ouvert.
En particulier pour $f = \mu$, les meilleures majorations connues de $\sum_{n\leq x} \mu(n)$ sont:

- $\sum_{n\leq x} \mu(n) = O(xe^{-c\sqrt{\log x}})$, où c est absolue et effective (cf [13] page 141).
- $\sum_{n\leq x} \mu(n) = O(x^{\frac{1}{2}+\varepsilon})$, qui est équivalente à GRH (cf [24] page 370)
  (en revanche on a $\sum_{n\leq x} \mu(n) = \Omega(x^{\frac{1}{2}})$ sans aucune hypothèse: cf [24] page 371).

Elles ne permettent pas de conclure pour l'instant.

- Enfin, selon un résultat de Salem et Zygmund (cf [22] et [19]), pour presque toute suite $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ à valeurs dans $\{-1,1\}$, on a:

$$\|\sum_{n\leq x} a_n e(n\alpha)\|_\infty \ll \sqrt{x\log x}.$$

Il ne semble donc pas absurde d'espérer une majoration du type $\sum_{n\leq x} \mu(n)e(n\alpha) \ll_\varepsilon x^{\frac{1}{2}+\varepsilon}$.

Bibliographie

[1] A. Balog, *The prime k-uplets conjecture*, Analytic Number theory, proceedings of a conference in honour of Paul T.Bateman, Birkhäuser, Boston (1990).

[2] E. Bombieri, *On the large sieve*, Mathematika, **12** (1965), 201-225.

[3] E. Bombieri, *Le grand crible dans la théorie analytique des nombres*, Astérisque **18**, Soc. Math. de France, Paris (1974).

[4] H. Daboussi, *Fonctions multiplicatives presque-périodiques B. D'après un travail commun avec Hubert Delange*, Astérisque **24-25**, Soc. Math. de France, Paris (1975), 321-324.

[5] H. Daboussi, *Caractérisation des fonctions multiplicatives p.p.*B^λ *à spectre non vide*, Ann. Inst. Fourier (Grenoble), **30** (1980), 141-166.

[6] H. Daboussi, *On exponential sums*, Analytic Number theory, proceedings of a conference in honour of Paul T.Bateman, Birkhäuser, Boston (1990).

[7] H. Daboussi & H. Delange, *Quelques propriétés des fonctions multiplicatives de module au plus égal à 1*, C.R. Acad. Sci. Paris, Sér. A, **278** (1974), 657-660.

[8] H. Daboussi & H. Delange, *On multiplicative arithmetical functions whose modulus does not exceed one*, J. London. Math. Soc., (2) **26** (1982), 245-264.

[9] H. Daboussi & H. Delange, *On a class of multiplicative functions*, Acta. Sci. Math., **49** (1985), 143-149.

[10] H. Davenport, *On some infinite series involving arithmetical functions (II)*, Quarterly J. Math, **8** (1937), 313-320.

[11] H. Davenport, *Multiplicative number theory*, Springer-Verlag, Berlin (1980).

[12] Y. Dupain, R.R. Hall & G. Tenenbaum, *Sur l'équirépartition modulo 1 de certaines fonctions de diviseurs*, J. London. Math. Soc., (2) **26** (1982), 397-411.

[13] W.J. Ellison en collaboration avec M. Mendès-France, *Les nombres premiers*, Publications de l'institut de mathématique de l'Université de Nancago, IX (1975).

[14] P.X. Gallagher, *Bombieri's Mean Value Theorem*, Mathematika, **15** (1968), 1-6.

[15] D. Hajela & B. Smith, *On the maximum of an exponential sum of the Möbius function*, Number Theory New-York 1984-85, Lecture Notes in Mathematics **1240**, Springer-Verlag (1985).

[16] G.H. Hardy & E.M. Wright, *An introduction to the theory of numbers*, Oxford (1979).

[17] K.H. Indlekofer, *A mean value theorem for multiplicative functions*, Math. Z., **172** (1980).

[18] K.H. Indlekofer, *Properties of uniformly summable multiplicative functions*, Periodica Mathematica Hungarica, **17** (1986), 143-161.

[19] J.P. Kahane, *Some random series of functions*, Heath Mathematical Monographs (1968).

[20] H.L. Montgomery, *Topics in multiplicative number theory*, Springer-Verlag, Berlin (1971).

[21] H.L. Montgomery & R.C. Vaughan, *On exponential sums with multiplicative coefficients*, Inventiones Math., **43** (1977), 69-82.

[22] R. Salem & A. Zygmund, *Some properties of trigonometrical series whose terms have random signs*, Acta math., **91** (1954), 245-301.

[23] G. Tenenbaum, *Introduction à la théorie analytique et probabiliste des nombres*, Publications de l'Institut Élie Cartan, Nancy (1990).

[24] E.C. Titchmarsh, *The theory of the Riemann Zeta-function*, revu par D.A. Heath-Brown, Oxford (1986).

[25] R.C. Vaughan, *Mean value theorems in prime number theory.*, J. London. Math. Soc., (2) **10** (1975), 153-162.

[26] R.C. Vaughan, *On the distribution of αp modulo 1*, Mathematatika, **24** (1977), 135-141.

[27] R.C. Vaughan, *Sommes trigonométriques sur les nombres premiers*, C.R. Acad. Sci. Paris, Sér. A, **285** (1977), 981-983.

[28] R.C. Vaughan, *An elementary method in prime number theory*, Acta arithmetica, **37** (1980), 111-115.

[29] I.M. Vinogradov, *The method of trigonometrical sums in the theory of numbers*, traduit du russe, revu et annoté par K.F. Roth et H. Davenport, Interscience, Londres (1954).

[30] A. Wintner, *Number theoretical almost periodicities*, Amer. J. Math., **67** (1945), 173-193.