Sommes d'exponentielles et principe de l'hyperbole

Louis Goubin

7 septembre 1994

1. Introduction

- Beaucoup de problèmes d'arithmétique sont liés à des questions d'indépendance entre les structures multiplicative et additive des entiers. L'étude du comportement asymptotique des sommes d'exponentielles de la forme

$$\sum_{n \leq x} f(n)e(n\theta), \tag{1}$$

où f est une fonction multiplicative et $e(n\theta) := \exp(2i\pi n\theta)$ est additive, permet d'obtenir des renseignements intéressants sur cette «indépendance».
Il est alors naturel de se demander pour quel type de fonction multiplicative f on a, pour tout irrationnel θ:

$$\sum_{n \leq x} f(n)e(n\theta) = o\Big(\sum_{n \leq x} f(n)\Big). \tag{2}$$

On notera $\mathcal{D}$ l'ensemble de ces fonctions et $\mathcal{M}$ l'ensemble des fonctions multiplicatives.
- Dans le cas des fonctions multiplicatives à valeurs dans le disque unité, on dispose du résultat suivant, dû à H. Daboussi (cf [3], [4] ou [11] page 392):
Théorème A. (Daboussi) *Pour tout θ irrationnel on a, uniformément pour f multipli- cative à valeurs dans le disque unité:*

$$\sum_{n \leq x} f(n)e(n\theta) = o(x). \tag{3}$$

Or on sait d'après un théorème de H. Delange ([6]) que si f est multiplicative à valeurs dans le disque unité, elle admet une valeur moyenne non nulle si et seulement si les deux conditions suivantes sont vérifiées: $\begin{cases} \sum_p \frac{1-f(p)}{p} \text{ converge} \\ \exists k \geq 1, f(2^k) \neq -1 \end{cases}$
On obtient ainsi une première classe de fonctions qui vérifient (2):

$$\{f \in \mathcal{M},\ \ |f| \leq 1,\ \ \sum_p \frac{1-f(p)}{p} \text{ converge},\ \ \exists k \geq 1, f(2^k) \neq -1\} \subset \mathcal{D}.$$

Plus généralement, K.H. Indlekofer ([9]) a obtenu (3) en supposant seulement que f est *uniformément sommable*.
Définition: Une fonction arithmétique f est dite uniformément sommable si on a:

$$\lim_{y \to +\infty} \Big(\sup_{x \geq 1} \frac{1}{x} \sum_{\substack{n \leq x \\ |f(n)| \geq y}} |f(n)| \Big) = 0.$$

On notera $\mathcal{L}^*$ l'ensemble des fonctions multiplicatives uniformément sommables.

Indlekofer a montré ([9]) que les fonctions de $\mathcal{L}^*$ qui ont une valeur moyenne non nulle sont caractérisées par les propriétés suivantes:
$$\begin{cases} \sum_p \frac{f(p)-1}{p} \text{ converge} \\ \sum_{\substack{p \\ |f(p)|\le\frac{3}{2}}} \frac{|f(p)-1|^2}{p} < +\infty \\ \sum_{\substack{p \\ |f(p)-1|\ge\frac{1}{2}}} \frac{|f(p)|}{p} < +\infty \\ \sum_p \sum_{k\ge 2} \frac{|f(p^k)|}{p^k} < +\infty \\ \forall p, 1+\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{f(p^k)}{p^k} \neq 0 \end{cases}$$

On obtient ainsi une nouvelle classe de fonctions contenue dans $\mathcal{D}$.

– En utilisant le principe de l'hyperbole de Dirichlet, Chowla ([1]) a montré que la fonction d (nombre de diviseurs) est aussi dans $\mathcal{D}$:

Théorème B. (Chowla) *Pour tout θ irrationnel, on a:*

$$\sum_{n\le x} d(n)e(n\theta) = o(x\log x). \tag{4}$$

En fait, Erdös ([8]) a montré qu'en général, on peut obtenir une majoration bien meilleure:

Théorème C. (Erdös) *Pour presque tout θ, on a:*

$$\sum_{n\le x} d(n)e(n\theta) = \mathcal{O}(\sqrt{x}\log x).$$

– Par ailleurs Y. Dupain, R.R. Hall et G. Tenenbaum ([7]) ont montré que les fonctions y^Ω sont dans la classe $\mathcal{D}$ lorsque $0 < y < 2$ (ici $\Omega(n)$ désigne le nombre de facteurs premiers de n comptés avec multiplicité):

Théorème D. (Dupain, Hall, Tenenbaum) *Si $0 < y < 2$, on a pour tout θ irrationnel:*

$$\sum_{n\le x} y^{\Omega(n)}e(n\theta) = o\Big(\sum_{n\le x} y^{\Omega(n)}\Big). \tag{5}$$

Leur démonstration – de nature analytique – s'appuie entre autres sur une estimation du type «Siegel-Walfisz» du comportement de y^Ω dans les progressions arithmétiques de raison «petite» .

– Dans ce qui précède, les fonctions multiplicatives considérées sont à valeurs réelles positives. Pour des fonctions f plus générales, seuls des résultats du type (3) semblent accessibles.

Dans cette direction, H. Daboussi (cf [2]) a généralisé (5) de la façon suivante:

Théorème E. (Daboussi) *Soit f une fonction complètement multiplicative telle que*

pour tout nombre premier p on ait $|f(p)| = y$, avec $0 < y < 2$.

Alors pour tout θ irrationnel on a:

$$\sum_{n\le x} f(n)e(n\theta) = o\Big(\sum_{n\le x} |f(n)|\Big).$$

2. Résultats

– Le premier objectif de cet article est d'obtenir un résultat de stabilité de la classe $\mathcal{D}$ par convolution. On montrera le résultat général suivant:

Théorème 1. *Soient f et h deux fonctions multiplicatives telles que:*

(H1) $\sum_p \frac{h(p)-1}{p}$, $\sum_{\substack{p \\ |h(p)|\le\frac{3}{2}}} \frac{|h(p)-1|^2}{p}$, $\sum_{\substack{p \\ |h(p)-1|\ge\frac{1}{2}}} \frac{|h(p)|}{p}$ *et* $\sum_p \sum_{k\ge 2} \frac{|h(p^k)|}{p^k}$

convergent.

(H2) $\forall p,\ 1+\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{h(p^k)}{p^k} \neq 0$

(F1) $f \geq 0$

(F2) $\sum_{n\le x} f(n) = o(x \sum_{n\le x} \frac{f(n)}{n})$

(F3) $f \in \mathcal{D}$.

Alors, si on pose $g := f * h$, on a: $g \in \mathcal{D}$.

Dans la pratique, on utilisera souvent des hypothèses plus faibles:

Corollaire 1. *Soient f et h deux fonctions multiplicatives telles que:*

(H'1) $|h| \le 1$ *et* $\sum_p \frac{1-h(p)}{p}$ *converge.*

(H'2) $\exists k \geq 1,\ h(2^k) \neq -1$.

(F1) $f \geq 0$

(F2) $\sum_{n\le x} f(n) = o(x \sum_{n\le x} \frac{f(n)}{n})$.

(F3) $f \in \mathcal{D}$.

Alors, si on pose $g := f * h$, on a: $g \in \mathcal{D}$.

En particulier, $h = \mathbf{1}$ convient, ce qui donne:

Corollaire 2. *Soit f une fonction multiplicative telle que:*

(F1) $f \geq 0$.

(F2) $\sum_{n\le x} f(n) = o(x \sum_{n\le x} \frac{f(n)}{n})$.

On suppose que: $f \in \mathcal{D}$.

Alors, si on pose $g := f * \mathbf{1}$, on a $g \in \mathcal{D}$.

On sait (voir par exemple [11] page 340) que la condition (F2) est vérifiée dès qu'il existe des constantes $\lambda_1 > 0$ et $0 \le \lambda_2 < 2$ telles que:

$$\forall p \text{ premier}, \forall k \geq 1,\ 0 \leq f(p^k) \leq \lambda_1 \lambda_2^{k-1}.$$

– Considérons les fonctions diviseurs généralisées d_l ($l \in \mathbf{N}^*$), où $d_l(n)$ est le nombre de manières de décomposer n en produit de l entiers non nuls.
En remarquant que

$$\sum_{n\le x} d_l(n) \sim \frac{1}{(l-1)!} x (\log x)^{l-1}$$

et

$$x \sum_{n\le x} \frac{d_l(n)}{n} \sim \frac{1}{(l-1)!} x (\log x)^{l},$$

on constate que $f = d_l$ entre dans le champ d'application du corollaire 2. On voit donc que si d_l est dans $\mathcal{D}$, alors d_{l+1} aussi. Comme d_1 est évidemment dans $\mathcal{D}$, on en déduit:

Corollaire 3. *Pour tout $l \in \mathbf{N}^*$ et tout θ irrationnel, on a:*

$$\sum_{n\leq x} d_l(n)e(n\theta) = o\Big(\sum_{n\leq x} d_l(n)\Big) = o\big(x(\log x)^{l-1}\big).$$

Remarquons que cette assertion peut également se déduire des résultats de [7]. En effet, la méthode employée par Dupain, Hall et Tenenbaum dans cet article pour établir (5) fonctionne sans changement (cf la remarque page 406) dans le cas de $\omega(n)$ et fournit:

$$\sum_{n\leq x} y^{\omega(n)}e(n\theta) = o\big(x(\log x)^{y-1}\big) \qquad (\theta \in \mathbf{R}\setminus\mathbf{Q}, \quad \mathbf{y > 0}).$$

Si on considère la fonction d_y, définie par:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{d_y(n)}{n^s} = \zeta(s)^y \qquad (\Re e\ s > 1),$$

on peut écrire $d_y = y^\omega * h$, avec:

$$\sum_{m=1}^{+\infty} \frac{|h(m)|}{m^{\frac{2}{3}}} < +\infty,$$

ce qui permet de conclure que d_y est dans $\mathcal{D}$ pour tout $y > 0$.
L'intérêt est ici d'avoir obtenu le corollaire 3 par des moyens élémentaires, sans faire appel à des estimations du type «Siegel-Walfisz».

– En combinant le théorème E – dont la démonstration utilise (5) –, et le principe mis en évidence de stabilité de la classe $\mathcal{D}$, on montrera ensuite le résultat suivant:

Théorème 2. *Soit $y > 0$. On suppose que f, multiplicative, vérifie les conditions:*

(i) $|f(p)| \leq y$ pour tout nombre premier p,
(ii) La série $\sum_p \sum_{\nu=2}^{+\infty} \frac{|f(p^\nu)|}{p^\nu}(\log p^\nu)^{max(1-y,0)}$ converge.
Alors pour tout θ irrationnel, on a:

$$\sum_{n\leq x} f(n)e(n\theta) = o\big(x(\log x)^{y-1}\big).$$

On voit facilement que ce résultat contient les théorèmes A, B, D, E et le corollaire 3, ainsi que le fait que y^ω et d_y sont dans $\mathcal{D}$ pour $y > 0$.
Dans le cas où $0 < y < 2$, le théorème 2 découle assez facilement du théorème E, par un argument de convolution. Un examen attentif de la démonstration dans [2] montre que la preuve du théorème E – en son état actuel – n'est transposable à la situation d'une fonction multiplicative générale satisfaisant les conditions (i) et (ii) que lorsque $0 < y < 2$. En effet le résultat provient, en dernier ressort, du fait que la quantité

$$\prod_{p\leq T} \Big(1 - \frac{1}{p}\Big)^{2y} \Big(1 + \frac{y^2}{p}\Big)$$

tend vers 0 quand T tend vers $+\infty$, ce qui n'est vrai que pour $y < 2$.
C'est pourquoi dans le cas général, on emploiera une méthode analogue à celle de la démonstration du théorème 1, reposant sur la stabilité par convolution du comportement des sommes d'exponentielles mises en jeu.

– Le théorème 2 ne donne un renseignement non trivial que si

$$\sum_p \frac{y - |f(p)|}{p} < +\infty.$$

Sous cette hypothèse supplémentaire, le résultat peut s'écrire de la façon suivante:

Corollaire 4. *Soit $y > 0$. On suppose que f, multiplicative, vérifie les conditions:*

(i) $|f(p)| \leq y$ pour tout nombre premier p,

(ii) La série $\sum_p \sum_{\nu=2}^{+\infty} \frac{|f(p^\nu)|}{p^\nu} (\log p^\nu)^{max(1-y,0)}$ converge,

(iii) La série $\sum_p \frac{y-|f(p)|}{p}$ converge.

Alors pour tout θ irrationnel, on a:

$$\sum_{n\leq x} f(n)e(n\theta) = o\Big(\sum_{n\leq x} |f(n)|\Big).$$

– Par ailleurs, on ne peut pas supprimer la condition

$$\sum_p \sum_{\nu=2}^{+\infty} \frac{|f(p^\nu)|}{p^\nu} (\log p^\nu)^{max(1-y,0)} < +\infty$$

du corollaire 4. Ainsi, on montrera que la fonction multiplicative 2^Ω – qui vérifie les hypothèses (i) et (iii) pour $y = 2$ – n'appartient pas à la classe $\mathcal{D}$:

Théorème 3. *Il existe un irrationnel θ tel que l'on ait, quand x tend vers $+\infty$:*

$$\sum_{n\leq x} 2^{\Omega(n)} e(n\theta) = \Omega\Big(\sum_{n\leq x} 2^{\Omega(n)}\Big).$$

De même on peut montrer que pour $y \geq 2$, y^Ω n'est pas dans $\mathcal{D}$. On constate donc que la restriction $0 < y < 2$ dans le théorème D est inévitable.

Remerciements : Je tiens à remercier le *referee* anonyme pour des remarques qui ont permis de simplifier certains points – notamment la démonstration du théorème 2 dans le cas $0 < y < 2$ – et de clarifier la démonstration du théorème 1.

3. Démonstration du théorème 1

Pour tout réel θ, et tout $x \geq 1$, on note:

$$G(x,\theta) := \sum_{n\leq x} g(n)e(n\theta).$$

On pose $G(x) := G(x,0)$, dont le comportement peut être relié à celui de f de la manière suivante:

Lemme 1. *Sous les hypothèses du théorème 1, on a:*

$$G(x) \asymp x \sum_{m \leq x} \frac{f(m)}{m}. \tag{6}$$

PREUVE : D'après Indlekofer ([9]), les hypothèses (H1) et (H2) montrent que h est absolument sommable et vérifie, pour un certain $\lambda \in \mathbf{C}^*$:

$$\sum_{n \leq x} h(n) \sim \lambda x. \tag{7}$$

Ensuite, en écrivant

$$\lambda x \sum_{m \leq x} \frac{f(m)}{m} - G(x) = \sum_{m \leq x} f(m) \Big[\frac{\lambda x}{m} - \sum_{l \leq \frac{x}{m}} h(l) \Big],$$

puis en séparant en deux la somme, selon la position de m par rapport à $\frac{x}{K}$, on obtient:

$$\lambda x \sum_{m \leq x} \frac{f(m)}{m} - G(x) \leq \sum_{m \leq \frac{x}{K}} f(m) \Big| \frac{\lambda x}{m} - \sum_{l \leq \frac{x}{m}} h(l) \Big| + \Big(K|\lambda| + \sum_{l \leq K} |h(l)| \Big) \sum_{m \leq x} f(m). \tag{8}$$

Un ε strictement positif étant donné, on peut d'après (7) choisir $K = K(\varepsilon)$ pour que la valeur absolue dans le premier terme soit majorée par $\frac{\varepsilon x}{2m}$. A cause de l'hypothèse (F2), le second terme de (8) est alors majoré par $\frac{\varepsilon x}{2} \sum\limits_{m \leq x} \frac{f(m)}{m}$ pour $x \geq x_0(\varepsilon)$, ce qui fournit le résultat attendu.

a) Cas où $\sum\limits_{m=1}^{+\infty} \frac{f(m)}{m} < +\infty$

En écrivant la somme d'exponentielles sous la forme

$$G(x,\theta) = \sum_{m \leq x} f(m) \sum_{l \leq \frac{x}{m}} h(l)$$

et en séparant en deux termes suivant la position de m par rapport à K, on obtient:

$$|G(x,\theta)| \leq \sum_{m \leq K} f(m) \Big| \sum_{l \leq \frac{x}{m}} h(l) e(lm\theta) \Big| + \sum_{K < m \leq x} f(m) \Big[\sum_{l \leq \frac{x}{m}} |h(l)| \Big]. \tag{9}$$

Du fait que h est uniformément sommable, on déduit facilement que le terme entre crochets et majoré – à une constante près – par $\frac{x}{m}$ (cf [9]).

Si on fixe $\varepsilon > 0$, l'hypothèse supplémentaire faite ici sur f permet de majorer le second terme de (9) par $\frac{\varepsilon x}{2}$, à condition de choisir $K = K(\varepsilon)$ assez grand.

Pour le premier terme, on a vu que h – étant uniformément sommable et de valeur moyenne non nulle – appartient à la classe $\mathcal{D}$. Tous les $m\theta$ étant irrationnels, on en déduit que l'on peut majorer le premier terme par $\frac{\varepsilon x}{2}$ pour $x \geq x_0(\varepsilon)$.

On obtient ainsi:

$$G(x,\theta) = o\big(G(x)\big)$$

car le lemme 1, joint à l'hypothèse faite sur f, donne $G(x) \asymp x$.

b) Cas où $\sum_{m=1}^{+\infty} \frac{f(m)}{m} = +\infty$

D'après Indlekofer ([9]), le fait que h soit uniformément sommable et de valeur moyenne non nulle permet d'en déduire une écriture plus pratique sous la forme d'une convolution:

Lemme 2. *Il existe des fonctions multiplicatives $\tilde{h}$ et ψ et une constante $A > 0$ telles que:*

$$h = \tilde{h} * \psi, \text{ avec } \sum_n \frac{|\psi(n)|}{n} < +\infty \text{ et } \begin{cases} \sum_{n \le x} |\tilde{h}(n)|^2 \le A^2 x \\ \forall p, |\tilde{h}(p)| \le A \end{cases}$$

On notera, de manière analogue à $G(x,\theta)$:

$$\tilde{H}(x,\theta) := \sum_{n \le x} \tilde{h}(n) e(n\theta).$$

Remarquons que l'inégalité de Cauchy-Schwarz donne immédiatement:

$$\tilde{H}(x,0) \ll x.$$

Les propriétés de $\tilde{h}$ permettent d'obtenir des renseignements intéressants sur son comportement dans les sommes d'exponentielles (cf [10]):

Théorème F. (Montgomery, Vaughan) *Si $|\theta - \frac{a}{q}| \le \frac{1}{q^2}$, $(a,q) = 1$ et $2 \le B \le q \le \frac{x}{B}$, alors:*

$$\tilde{H}(x,\theta) \ll \frac{x}{\log x} + x B^{-\frac{1}{2}} (\log B)^{\frac{3}{2}}. \tag{10}$$

En utilisant le lemme 2, on peut écrire:

$$G(x,\theta) = \sum_{lm \le x} \psi(l) f(m) \tilde{H}\Big(\frac{x}{lm}, lm\theta\Big). \tag{11}$$

D'après le lemme 1, il suffit de montrer que pour tout $\varepsilon > 0$ et pour $x \ge x_0(\varepsilon)$, le membre de droite de (11) est

$$\ll \varepsilon x \sum_{m \le x} \frac{f(m)}{m}.$$

La convergence de la série $\sum_l \frac{|\psi(l)|}{l}$ et la majoration $\tilde{H}(x,0) \ll x$ permettent de supposer $l \le L$, où $L = L(\varepsilon)$ est choisi assez grand.

L'hypothèse

$$\sum_{m \le x} f(m) = o\Big(x \sum_{m \le x} \frac{f(m)}{m}\Big)$$

permet également de restreindre la sommation de (11) au domaine $lm \le \frac{x}{x_1(\varepsilon)}$ pour toute constante fixée $x_1(\varepsilon)$.

Il reste donc à montrer que pour $y > x_2(\varepsilon)$, on a:

$$\sum_{m \le \frac{y}{x_1(\varepsilon)}} f(m) \tilde{H}\Big(\frac{y}{m}, m\theta\Big) \ll \varepsilon y \sum_{m \le y} \frac{f(m)}{m}. \tag{12}$$

Or le résultat de Montgomery et Vaughan implique la propriété suivante:

Pour chaque $\varepsilon > 0$, on a $\tilde{H}(x,\theta) \ll \varepsilon x$ dès que $x > x_1(\varepsilon)$ et

$$\{\theta\} \notin E(\varepsilon) := \bigcup_{q \leq B} \bigcup_{\substack{1 \leq a < q \\ (a,q)=1}} \Big[\frac{a}{q} - \frac{1}{qQ}; \frac{a}{q} + \frac{1}{qQ}\Big],$$

avec $B = \frac{1}{\varepsilon^3}$ et $Q = \lfloor \frac{1}{\varepsilon^4} \rfloor$. On peut prendre par exemple $x_1(\varepsilon) = \exp\big(\frac{1}{\varepsilon}\big)$.

On voit bien que la sous-somme de (12) correspondant à $\{m\theta\} \notin E(\varepsilon)$ est majorée par le membre de droite. Il suffit donc d'évaluer, pour $y > x_2(\varepsilon)$:

$$\sum_{\substack{m \leq y \\ \{\theta m\} \in E(\varepsilon)}} \frac{f(m)}{m}. \tag{13}$$

Dans ce but, on majore la fonction indicatrice de $E(\varepsilon)$ par le polynôme trigonométrique:

$$C \sum_{q \leq B} \sum_{\substack{1 \leq a < q \\ (a,q)=1}} \left(\frac{\sin \pi\theta qQ}{qQ \sin\big(\pi\big(\theta - \frac{a}{q}\big)\big)}\right)^2 = \frac{C}{Q} \sum_{q \leq B} \frac{1}{q} \sum_{\substack{1 \leq a < q \\ (a,q)=1}} \sum_{|k| \leq qQ} \Big(1 - \frac{|k|}{qQ}\Big) \cos\Big(2\pi k\Big(\theta - \frac{a}{q}\Big)\Big),$$

où C est une constante absolue.

On reporte dans (13), et on intervertit les sommations. Comme f est dans $\mathcal{D}$, on voit – par sommation d'Abel – que la contribution de chaque $k \neq 0$ est

$$o\Big(\sum_{m \leq y} \frac{f(m)}{m}\Big).$$

On obtient donc que (13) est

$$\ll \big(\varepsilon + o(1)\big) \sum_{m \leq y} \frac{f(m)}{m},$$

ce qui fournit bien le résultat attendu.

4. Démonstration du corollaire 1

Il suffit de montrer que les hypothèses (H1) et (H2) de la proposition 2 sont vérifiées.

– D'après (H'2),

$$\exists k \geq 1,\ \Re e(h(2^k)) > -1.$$

Donc

$$\Re e \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{h(2^k)}{2^k} > \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{-1}{2^k} = -1.$$

De plus

$$\forall p \geq 3,\ \Re e \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{h(p^k)}{p^k} \geq \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{-1}{p^k} = \frac{-1}{p-1} > -1,$$

ce qui donne (H2).

– Pour prouver (H1), on utilise l'identité classique:

$$\forall u \in \mathbf{C}, |\mathbf{u}| \leq \mathbf{1} \Rightarrow |\mathbf{u} - \mathbf{1}|^{\mathbf{2}} \leq \mathbf{2}\Re\mathbf{e}(\mathbf{1} - \mathbf{u}).$$

En particulier
$$\forall p,\ \ |h(p)-1|^2 \leq 2(1-\Re e h(p)).$$
Or par hypothèse
$$\sum_p \frac{1-\Re e h(p)}{p} < +\infty.$$
Donc
$$\sum_p \frac{|h(p)-1|^2}{p} < +\infty.$$
Soit χ la fonction caractéristique des p tels que $|h(p)-1| \geq \frac{1}{2}$.
On a:
$$\chi(p)=1 \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{4} \leq |h(p)-1|^2 \leq 2\Re e(1-h(p)),$$
ce qui donne:
$$\forall p,\ \ \chi(p)|h(p)| \leq 8(1-\Re e h(p)).$$
Or
$$\sum_p \frac{1-\Re e h(p)}{p} < +\infty,$$
donc
$$\sum_{\substack{p \\ |h(p)-1| \geq \frac{1}{2}}} \frac{|h(p)|}{p} = \sum_p \frac{\chi(p)|h(p)|}{p} < +\infty.$$
Enfin
$$\sum_{k\geq 2} \frac{|h(p^k)|}{p^k} \leq \sum_{k \geq 2} \frac{1}{p^k} = \frac{1}{p(p-1)},$$
d'où
$$\sum_p \sum_{k\geq 2} \frac{|h(p^k)|}{p^k} < +\infty.$$
(H1) est donc vraie, ce qui termine la preuve du corollaire.

5. Démonstration du théorème 2

a) Dans le cas $1 \leq y < 2$

Le résultat se déduit du théorème E par convolution.
Soit g une fonction vérifiant les hypothèses du théorème 2. On peut supposer
$$\sum_p \frac{y-|g(p)|}{p} < +\infty,$$
car sinon on a directement, pour tout θ:
$$|G(x,\theta)| \leq \sum_{n \leq x} |g(n)| = o\big(x(\log x)^{y-1}\big).$$

Définissons une fonction f complètement multiplicative de la manière suivante:

- Si $g(p) = r_p e^{i\theta_p}$, avec $0 < r_p \leq y$, on pose $f(p) = y e^{i\theta_p}$.
- Si $g(p) = 0$, on pose $f(p) = y e^{i\theta_p}$, avec θ_p quelconque.

On peut écrire $g = f*h$, les séries entières correspondantes vérifiant:

$$\forall z,\ \ |z|<1,\ \ \sum_{\nu=0}^{+\infty} g(p^\nu)z^\nu = \Big(\sum_{\nu=0}^{+\infty} f(p^\nu)z^\nu\Big)\Big(\sum_{\nu=0}^{+\infty} h(p^\nu)z^\nu\Big),$$

d'où, puisque f est complètement multiplicative:

$$\sum_{\nu=0}^{+\infty} h(p^\nu)z^\nu = \big(1-f(p)z\big)\sum_{\nu=0}^{+\infty} g(p^\nu)z^\nu.$$

Donc on a pour tout $\nu \geq 1$:

$$h(p^\nu) = g(p^\nu) - f(p)g(p^{\nu-1}).$$

En particulier, d'après la définition de f, on a:

$$|h(p)| = |g(p) - f(p)| = y - |g(p)|.$$

On en déduit:

$$\sum_{\nu=1}^{+\infty}\frac{|h(p^\nu)|}{p^\nu} = \frac{y-|g(p)|}{p} + \sum_{\nu\geq 2}\frac{|g(p^\nu)-f(p)g(p^{\nu-1})|}{p^\nu} \ll \frac{y-|g(p)|}{p} + \sum_{\nu\geq 2}\frac{|g(p^\nu)|}{p^\nu} + \frac{1}{p^2}.$$

Par conséquent, comme on a supposé

$$\sum_p \frac{y-|g(p)|}{p} < +\infty,$$

on obtient, en utilisant également l'hypothèse (ii):

$$\sum_p\sum_{\nu\geq 1}\frac{|h(p^\nu)|}{p^\nu} < +\infty,$$

puis

$$\sum_{m=1}^{+\infty}\frac{|h(m)|}{m} < +\infty.$$

On peut donc écrire, pour tout K:

$$G(x,\theta) = \sum_{m\leq K} h(m)\sum_{l\leq \frac{x}{m}} f(l)e(lm\theta) + \sum_{m>K} h(m)\sum_{l\leq\frac{x}{m}} f(l)e(lm\theta). \tag{14}$$

Soit $\varepsilon > 0$ fixé.

Dans le second terme, la somme intérieure est majorée par $\frac{x}{m}(\log x)^{y-1}$, car $|f| = y^\Omega$ avec $0<y<2$, si bien que le second terme est majoré par $\frac{\varepsilon}{2}x(\log x)^{y-1}$, à condition de choisir $K = K(\varepsilon)$ assez grand.

Dans le premier terme, pour chaque $m \leq K$, on peut appliquer le théorème E à la somme intérieure, ce qui donne à nouveau – en choisissant $x \geq x_0(\varepsilon)$ – un terme majoré par $\frac{\varepsilon}{2}x(\log x)^{y-1}$.

Le théorème 2 est ainsi démontré dans le cas où $0<y<2$.

b) Dans le cas $0<y<1$

La démonstration précédente est presque identique. Dans le second terme de (14), la somme intérieure est majorée par $\frac{x}{m}\big(\log\frac{2x}{m}\big)^{y-1}$ et la condition (ii) du théorème assure que pour $K = K(\varepsilon)$ assez grand et $x \geq x_1(\varepsilon)$:

$$\sum_{K<m\leq x}\frac{|h(m)|}{m}\Big(\log\frac{2x}{m}\Big)^{y-1} \leq \frac{\varepsilon}{2}x(\log x)^{y-1}.$$

c) Dans le cas général

En utilisant la même méthode que dans la démonstration du théorème 1, on va montrer que si le théorème 2 est vrai pour $y-1$, alors il est également vrai pour y. Ceci, joint à ce qui précède, montrera que le théorème 2 est vrai pour tout $y>0$.

– Soit donc g une fonction multiplicative vérifiant les hypothèses du théorème 2 pour un certain $y>1$. Définissons alors les fonctions multiplicatives f et h de la façon suivante:
  Si $g(p) = yu_p$, avec $|u_p| \leq 1$, on pose

$$\forall k \geq 0, \ \begin{cases} f(p^k) = d_{y-1}(p^k)u_p^k \\ h(p^k) = u_p^k \end{cases}$$

  On peut alors écrire $g = f{*}h{*}\psi$, avec, en ce qui concerne les séries entières:

$$\forall z, \ \ |z|<1, \ \ \sum_{\nu=0}^{+\infty} g(p^\nu)z^\nu = \frac{1}{(1-u_pz)^{y-1}}\frac{1}{1-u_pz}\sum_{\nu=0}^{+\infty}\psi(p^\nu)z^\nu.$$

  Donc

$$\sum_{\nu=0}^{+\infty}\psi(p^\nu)z^\nu = (1-u_pz)^y\sum_{\nu=0}^{+\infty}g(p^\nu)z^\nu.$$

  On obtient ainsi:

$$\forall k \geq 0, \ \ \psi(p^k) = \sum_{\nu=0}^{k}(-u_p)^\nu\binom{y}{\nu}g(p^{k-\nu}),$$

  avec, comme $y>0$:

$$\left|\binom{y}{\nu}\right| = \left|\frac{y(y-1)\dots(y-\nu+1)}{\nu!}\right| \leq \frac{y(y+1)\dots(y+\nu-1)}{\nu!} = d_y(p^\nu).$$

  En tenant compte du fait que $\psi(p)=0$, on trouve:

$$\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{|\psi(p^k)|}{p^k} \leq \sum_{k=2}^{+\infty}\frac{1}{p^k}\sum_{\nu=0}^{k}d_y(p^\nu)|g(p^{k-\nu})| \leq \sum_{k=2}^{+\infty}\frac{d_y(p^{k-1})y+d_y(p^k)}{p^k}+\sum_{\nu=2}^{+\infty}\frac{|g(p^\nu)|}{p^\nu}\sum_{k\geq 0}\frac{d_y(p^k)}{p^k}$$

  après avoir changé ν en $k-\nu$ dans le second terme.
  Comme $\sum_{k\geq 0}\frac{d_y(p^k)}{p^k} = \left(1-\frac{1}{p}\right)^{-y}$ est borné, on obtient finalement, grâce à l'hypothèse (ii):

$$\sum_p\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{|\psi(p^k)|}{p^k} < +\infty,$$

  puis

$$\sum_{m=1}^{+\infty}\frac{|\psi(m)|}{m} < +\infty.$$

  Il en résulte qu'il suffit de montrer le résultat du théorème pour $f{*}h$.

– Posons donc:

$$S(x,\theta) := \sum_{n\leq x}(f{*}h)(n)e(n\theta).$$

  On veut montrer que pour θ irrationnel, on a:

$$S(x,\theta) = o\big(x(\log x)^{y-1}\big).$$

Procédons comme dans la démonstration du théorème 1. Comme h est de module au plus 1, on peut prendre $\tilde{h} = h$ dans le lemme 2. On écrit ainsi:

$$S(x,\theta) = \sum_{m \le x} f(m) H\Big(\frac{x}{m}, m\theta\Big), \tag{15}$$

où H est défini comme $\tilde{H}$. Comme on a:

$$\sum_{m \le x} |f(m)| \le \sum_{m \le x} d_{y-1}(m) = o\big(x(\log x)^{y-1}\big),$$

on peut restreindre la sommation de (15) au domaine $m \le \frac{x}{x_1(\varepsilon)}$ pour toute constante fixée $x_1(\varepsilon)$.
Il reste donc à montrer que, pour $z \ge x_2(\varepsilon)$:

$$\sum_{m \le \frac{z}{x_1(\varepsilon)}} f(m) H\Big(\frac{z}{m}, m\theta\Big) \ll \varepsilon z \big(\log z\big)^{y-1}. \tag{16}$$

En définissant $E(\varepsilon)$ de la même façon que dans la preuve du théorème 1, on obtient de manière analogue que la sous-somme de (16) correspondant à $\{m\theta\} \notin E(\varepsilon)$ est majorée par le membre de droite.
Pour évaluer, pour $z \ge x_2(\varepsilon)$, la somme

$$\sum_{\substack{m \le z \\ \{\theta m\} \in E(\varepsilon)}} \frac{|f(m)|}{m}. \tag{17}$$

on majore à nouveau la fonction indicatrice de $E(\varepsilon)$ par le polynôme trigonométrique

$$\frac{C}{Q} \sum_{q \le B} \frac{1}{q} \sum_{\substack{1 \le a < q \\ (a,q)=1}} \sum_{|k| \le qQ} \Big(1 - \frac{|k|}{qQ}\Big) \cos\Big(2\pi k\Big(\theta - \frac{a}{q}\Big)\Big),$$

puis on reporte dans (17) et on intervertit les sommations.
Comme $|f|$ vérifie les hypothèses du théorème 2, que l'on a supposé vrai pour $y-1$, la contribution de chaque $k \ne 0$ est, par sommation d'Abel:

$$0\big(x(\log x)^{y-1}\big).$$

On obtient donc que (17) est

$$\ll \big(\varepsilon + o(1)\big)(\log x)^{y-1},$$

ce qui termine la démonstration.

6. Démonstration du corollaire 4

Ecrivons $|f| = d_y * \psi$. Les séries entières correspondant à ces fonctions multiplicatives vérifient:

$$\forall z,\ \ |z| < 1,\ \ \sum_{\nu=0}^{+\infty} |f(p^\nu)| z^\nu = (1-z)^{-y} = \sum_{\nu=0}^{+\infty} \psi(p^\nu) z^\nu.$$

On en déduit facilement, pour tout k entier:

$$\psi(p^k) = \sum_{\nu=0}^{k} (-1)^\nu \binom{y}{\nu} |f(p^{k-\nu})|,$$

d'où:

$$|\psi(p^k)| \leq \sum_{\nu=0}^{k} d_y(p^\nu)|f(p^{k-\nu})|.$$

En tenant compte de la relation $\psi(p) = |f(p)| - y$, on trouve ainsi:

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{|\psi(p^k)|}{p^k} \leq \frac{y - |f(p)|}{p} + \sum_{k\geq 2} \frac{1}{p^k} \sum_{\nu=0}^{k} d_y(p^\nu)|f(p^{k-\nu})|,$$

$$\ll \frac{y - |f(p)|}{p} + \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{d_y(p^k)}{p^k} + \sum_{\nu=2}^{+\infty} \frac{|f(p^\nu)|}{p^\nu},$$

d'où, grâce aux hypothèses (ii) et (iii):

$$\sum_p \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{|\psi(p^k)|}{p^k} < +\infty,$$

et enfin:

$$\sum_{m=1}^{+\infty} \frac{|\psi(m)|}{m} < +\infty.$$

On en déduit facilement que:

$$\sum_{n\leq x} |f(n)| \sim x(\log x)^{y-1},$$

d'où le corollaire annoncé.

7. Démonstration du théorème 3

Dans ce qui suit, on aura besoin de l'ordre moyen de la fonction 2^Ω. Pour la commodité du lecteur, nous rappellerons comment on peut l'obtenir, en procédant par convolution à partir de l'ordre moyen de la fonction d.

a) Identités de convolution

Comme on a affaire à des fonctions multiplicatives, il suffit de vérifier ces identités sur les puissances de nombres premiers.

Lemme 3. *On a $2^\Omega = h*f$, où h et f, multiplicatives, sont définies respectivement par:*

$$\begin{cases} \forall k \geq 1, h(2^k) = 0 \\ \forall p \neq 2, \forall k \geq 0, h(p^k) = 2^k \end{cases} \quad \text{et} \quad f(n) = \begin{cases} n & si\ \exists k \geq 0, n = 2^k \\ 0 & sinon \end{cases}$$

PREUVE :

– Soit $p \neq 2$ et $k \geq 0$.

$$(h * f)(p^k) = \sum_{\nu=0}^{k} \underbrace{f(p^\nu)}_{=0 \text{ si } \nu\neq 0} h(p^{k-\nu}) = h(p^k) = 2^k = 2^{\Omega(p^k)}.$$

– Prenons $k \geq 0$. On a:

$$(h * f)(2^k) = \sum_{\nu=0}^{k} \underbrace{h(2^\nu)}_{=0 \text{ si } \nu>0} f(2^{k-\nu}) = f(2^k) = 2^k = 2^{\Omega(2^k)}.$$

Lemme 4. *On a $h = d * g$, où g, multiplicative, est définie par:*

$$\forall p \neq 2, g(p^k) = \begin{cases} 2^{k-2} & si\ k \geq 2 \\ 0 & si\ k = 1 \end{cases} \qquad et \qquad g(2^k) = \begin{cases} 0 & si\ k \geq 3 \\ 1 & si\ k = 2 \\ -2 & si\ k = 1 \end{cases}$$

PREUVE :

- Soit $p \neq 2$ et $k \geq 2$.

$$(d*g)(p^k) = \sum_{\nu=0}^{k} g(p^\nu)d(p^{k-\nu}) = (k+1) + \sum_{\nu=2}^{k} 2^{\nu-2}(k-\nu+1) = (k+1) + \sum_{\nu=2}^{k} 2^{\nu-2} \sum_{i=0}^{k-\nu} 1$$

$$= (k+1) + \sum_{i=0}^{k-2} \sum_{\nu=2}^{k-i} 2^{\nu-2} = (k+1) + \sum_{i=0}^{k-2} (2^{k-i-1} - 1) = 1 + \sum_{i=0}^{k-1} 2^i = 2^k = h(p^k).$$

- Pour $p \neq 2$ et $k = 1$, on a:

$$(d * g)(p) = 2 = h(p).$$

- Pour $p = 2$ et $k \geq 2$, on a:

$$(d * g)(2^k) = \sum_{\nu=0}^{k} g(2^\nu)d(2^{k-\nu}) = (k+1) - 2k + (k-1) = 0 = h(2^k).$$

- Pour $p = 2$ et $k = 1$, on a:

$$(d * g)(2) = 0 = h(2).$$

b) Ordres moyens

Lemme 5. *Si on pose $C = \prod_{p>2} \left(1 + \frac{1}{p(p-2)}\right)$, on a:*

$$\sum_{n \leq x} h(n) = \frac{1}{4} C x \log x + \mathcal{O}(x).$$

PREUVE :

- D'après le lemme 4, on a:

$$\sum_{n \leq x} h(n) = \sum_{k \leq x} g(k) \sum_{l \leq \frac{x}{k}} d(l) = \sum_{k \leq x} g(k) \Big(\frac{x}{k} \log \frac{x}{k} + \mathcal{O}\big(\frac{x}{k}\big) \Big),$$

soit:

$$\sum_{n \leq x} h(n) = x \log x \sum_{k \leq x} \frac{g(k)}{k} - x \sum_{k \leq x} \frac{g(k) \log k}{k} + \mathcal{O}\Big(x \sum_{k \leq x} \frac{|g(k)|}{k} \Big). \tag{18}$$

- Pour tout α réel, on a:

$$\sum_{k \leq x} \frac{|g(k)|}{k^\alpha} \leq \prod_{p \leq x} \Big(\sum_{\nu \geq 0} \frac{|g(p^\nu)|}{p^{\alpha\nu}} \Big).$$

La série $\sum_{\nu} \frac{|g(p^\nu)|}{p^{\alpha\nu}}$ dès que α est tel que $3^\alpha > 2$ (pour $p = 2$, il n'y a qu'un nombre fini de termes non nuls dans la série). Pour $\alpha > \frac{\log 2}{\log 3}$, on obtient ainsi:

$$\sum_{k \leq x} \frac{|g(k)|}{k^\alpha} \ll \prod_{2<p \leq x} \Big(1 + \sum_{\nu \geq 2} \frac{2^{\nu-2}}{p^{\alpha\nu}} \Big) = \prod_{2<p \leq x} \Big(1 + \frac{1}{p^\alpha(p^\alpha - 2)} \Big),$$

ce qui montre que la série $\sum \frac{g(k)}{k^\alpha}$ converge absolument ($\alpha > \frac{\log 2}{\log 3} \Rightarrow 2\alpha > 1$). On peut donc écrire:

$$\sum_{k\leq x} \frac{g(k)}{k} = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{g(k)}{k} - \sum_{k>x} \frac{g(k)}{k}$$

avec

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{g(k)}{k} = \prod_p \Big(\sum_{\nu\geq 0} \frac{g(p^\nu)}{p^\nu} \Big) = \Big(1 - \frac{2}{2} + \frac{1}{4}\Big) \prod_{p>2} \Big(1 + \frac{1}{p(p-2)}\Big) = \frac{C}{4}. \quad (19)$$

et, en s'inspirant de la méthode de Rankin, et en prenant $\alpha > \frac{\log 2}{\log 3}$:

$$\sum_{k>x} \frac{g(k)}{k} \ll \frac{1}{x^{1-\alpha}} \sum_{k>x} \frac{|g(k)|}{k^\alpha} \ll_\alpha \frac{1}{x^{1-\alpha}}. \quad (20)$$

Par ailleurs, si $\frac{\log 2}{\log 3} < \alpha < 1$, on a:

$$\sum_{k\leq x} \frac{g(k)\log k}{k} \ll_\alpha \sum_{k\leq x} \frac{|g(k)|}{k^\alpha} \ll_\alpha 1. \quad (21)$$

- En choisissant α quelconque dans $]\frac{\log 2}{\log 3}, 1[$ et en reportant (19), (20) et (21) dans (18), on obtient le résultat annoncé.

Lemme 6. *Avec la même constante C que dans le lemme 5, on a:*

$$\sum_{n\leq x} 2^{\Omega(n)} = \frac{C}{8\log 2} x(\log x)^2 + \mathcal{O}(x\log x).$$

Preuve :

- En utilisant le lemme 3, on peut écrire:

$$\sum_{n\leq x} 2^{\Omega(n)} = \sum_{k\leq x} f(k) \sum_{l\leq \frac{x}{k}} h(l),$$

ce qui donne, d'après le lemme 5:

$$\sum_{n\leq x} 2^{\Omega(n)} = \sum_{k\leq x} f(k) \Big(\frac{1}{4} C \frac{x}{k} \log \frac{x}{k} + \mathcal{O}\big(\frac{x}{k}\big) \Big)$$

soit:

$$\sum_{n\leq x} 2^{\Omega(n)} = \frac{C}{4} x \log x \sum_{k\leq x} \frac{f(k)}{k} - \frac{C}{4} x \sum_{k\leq x} \frac{f(k)\log k}{k} + \mathcal{O}\Big(x \sum_{k\leq x} \frac{f(k)}{k} \Big)$$

- Or on a:

$$\sum_{k\leq x} \frac{f(k)}{k} = \sum_{0\leq r\leq \log_2 x} 1 = \frac{\log x}{\log 2} + \mathcal{O}(1)$$

et

$$\sum_{k\leq x} \frac{f(k)\log k}{k} = \sum_{0\leq r\leq \log_2 x} \log 2^r = \log 2 \frac{\lfloor \log_2 x\rfloor (\lfloor \log_2 x \rfloor + 1)}{2}$$

$$= \frac{\log 2}{2} \Big(\frac{\log x}{\log 2} + \mathcal{O}(1) \Big)^2 = \frac{(\log x)^2}{2\log 2} + \mathcal{O}(\log x).$$

On trouve donc finalement:

$$\sum_{n\leq x} 2^{\Omega(n)} = \frac{C}{8\log 2} x(\log x)^2 + \mathcal{O}(x\log x).$$

c) Minoration de la somme d'exponentielles

Posons $S(x,\theta) = \sum_{n\leq x} 2^{\Omega(n)} e(n\theta)$. Le principe de l'hyperbole, avec le lemme 3, donne:

$$S(x,\theta) = \sum_{l\leq x} f(l) \sum_{k\leq \frac{x}{l}} h(k)e(kl\theta) = S_1(\theta) + S_2(\theta)$$

avec

$$S_1(\theta) = \sum_{l\leq y} f(l) \sum_{k\leq \frac{x}{l}} h(k)e(kl\theta)$$

et

$$S_2(\theta) = \sum_{k\leq \frac{x}{y}} h(k) \sum_{y<l\leq \frac{x}{k}} f(l)e(lk\theta).$$

– On a tout d'abord:

$$|S_1(\theta)| \leq \sum_{l\leq y} f(l) \sum_{k\leq \frac{x}{l}} h(k),$$

ce qui donne, d'après le lemme 5:

$$S_1(\theta) \ll \sum_{l\leq y} f(l)\frac{x}{l}\log x = x\log x \sum_{2^r\leq y} 1$$

d'où finalement:

$$S_1(\theta) \ll x\log x \log y. \tag{22}$$

– La deuxième somme peut s'écrire sous la forme:

$$S_2(\theta) = T_1(\theta) + T_2(\theta)$$

avec

$$T_1(\theta) = \sum_{\frac{x}{4y}<k\leq \frac{x}{y}} h(k) \sum_{y<l\leq \frac{x}{k}} f(l)e(lk\theta)$$

$$T_2(\theta) = \sum_{k\leq \frac{x}{4y}} h(k) \sum_{2^r\leq \frac{x}{k}} 2^r e(2^r k\theta)$$

– Dans la somme $T_1(\theta)$, comme $\frac{x}{k} < 4y$, il y a au plus deux puissances de 2 dans $]y,\frac{x}{k}]$, d'où:

$$|T_1(\theta)| \leq \sum_{\frac{x}{4y}<k\leq \frac{x}{y}} h(k)\Big(\frac{x}{k} + \frac{x}{2k}\Big) \leq 6y \sum_{k\leq \frac{x}{y}} h(k),$$

ce qui, grâce au lemme 5, donne:

$$T_1(\theta) \ll x\log x. \tag{23}$$

– Dans $T_2(\theta)$, pour chaque k, ce sont les deux plus grandes valeurs de r qui jouent un rôle prépondérant. On écrit donc $T_2(\theta) = U_1(\theta) + U_2(\theta)$, avec:

$$U_1(\theta) = \sum_{k\leq \frac{x}{4y}} h(k) \sum_{\log_2 y<r<\lfloor \log_2 \frac{x}{k}\rfloor -1} 2^r e(2^r k\theta)$$

$$U_2(\theta) = \sum_{k\leq \frac{x}{4y}} h(k)2^{\lfloor \log_2 \frac{x}{k}\rfloor -1} e(2^{\lfloor \log_2 \frac{x}{k}\rfloor -1}k\theta)\Big(1 + 2e(2^{\lfloor \log_2 \frac{x}{k}\rfloor -1}k\theta)\Big)$$

La condition $k \leq \frac{x}{4y}$ assure que l'on a $\lfloor \log_2 \frac{x}{k}\rfloor - 1 > \log_2 y$.

– Une majoration grossière donne:

$$|U_1(\theta)| \leq \sum_{k\leq \frac{x}{4y}} h(k) \sum_{\log_2 y<r<\lfloor \log_2 \frac{x}{k}\rfloor -1} 2^r \leq \sum_{k\leq \frac{x}{4y}} h(k)\big(2^{\lfloor \log_2 \frac{x}{k}\rfloor -1}-1\big) \leq \frac{x}{2}\sum_{k\leq x}\frac{h(k)}{k}$$

Or, en effectuant une sommation par parties, on obtient, avec le lemme 5:

$$\sum_{k\leq x}\frac{h(k)}{k} = \frac{1}{x}\sum_{k\leq x} h(k) + \int_1^x \frac{du}{u^2}\sum_{k\leq u} h(k) = \frac{C}{4}\int_1^x \frac{\log u\ du}{u} + \mathcal{O}(\log x)$$

soit

$$\sum_{k\leq x}\frac{h(k)}{k} = \frac{C}{8}(\log x)^2 + \mathcal{O}(\log x).$$

D'où finalement:

$$|U_1(\theta)| \leq \frac{C}{16}x(\log x)^2 + \mathcal{O}(x\log x). \tag{24}$$

– C'est la somme $U_2(\theta)$ que l'on va chercher à minorer:

$$|U_2(\theta)| \geq \Re e\, U_2(\theta) = \sum_{k\leq \frac{x}{4y}} h(k)2^{\lfloor \log_2 \frac{x}{k}\rfloor -1}\Big(\cos(2^{\lfloor \log_2 \frac{x}{k}\rfloor}k\pi\theta)+2\cos(2^{\lfloor \log_2 \frac{x}{k}\rfloor+1}k\pi\theta)\Big)$$

Or pour tout α, on a l'inégalité $\cos(2\pi\alpha) \geq 1-2\pi\|\alpha\|$, donc:

$$|U_2(\theta)| \geq \sum_{k\leq \frac{x}{4y}} h(k)2^{\lfloor \log_2 \frac{x}{k}\rfloor -1}\Big(3-2\pi\|2^{\lfloor \log_2 \frac{x}{k}\rfloor -1}k\theta\| - 4\pi\|2^{\lfloor \log_2 \frac{x}{k}\rfloor}k\theta\|\Big)$$

Or on a l'encadrement suivant:

$$\frac{x}{2} \leq 2^{\lfloor \log_2 \frac{x}{k}\rfloor}k \leq x$$

ce qui donne:

$$|U_2(\theta)| \geq \big(1-2\pi M(x,y,\theta)\big)U_2(0) \tag{25}$$

si on pose:

$$M(x,y,\theta) = \max_{\substack{\frac{x}{4}\leq n\leq x \\ 2^{\lfloor \log_2 y\rfloor}|n}} \|n\theta\|$$

– Or d'après les majorations (22) et (23), on a:

$$U_2(\theta) = S(x,\theta) - U_1(\theta) + \mathcal{O}(x\log x\log y).$$

Par conséquent, en reportant dans (25), on obtient:

$$|S(x,\theta)| + |U_1(\theta)| \geq \big(1-2\pi M(x,y,\theta)\big)\big(S(x,0)-U_1(0)\big) + \mathcal{O}(x\log x\log y)$$

soit, d'après le lemme 6, et la majoration (24):

$$|S(x,\theta)| \geq \frac{C}{16}\Big(\big(\frac{2}{\log 2}-1\big)\big(1-2\pi M(x,y,\theta)\big)-1\Big)x(\log x)^2 + \mathcal{O}(x\log x\log y)$$

On obtient finalement, uniformément en x, y et θ:

$$|S(x,\theta)| \geq \Big((1-\log 2)-\pi(2-\log 2)M(x,y,\theta)\Big)S(x,0) + \mathcal{O}(x\log x\log y). \tag{26}$$

d) Étude de $M(x,y,\theta)$

On va montrer le résultat suivant:

Lemme 7. *Soit $\phi : \mathbf{R}_+^* \to \mathbf{R}$ telle que $\lim_{x \to +\infty} \phi(x) = +\infty$. Soit $\varepsilon > 0$.*
Alors il existe un irrationnel $\theta_{\phi,\varepsilon}$ et une suite strictement croissante (x_q) d'entiers
naturels telle que:

$$\forall q \in \mathbf{N}, \mathbf{M}(\mathbf{x_q}, \phi(\mathbf{x_q}), \theta_{\phi,\varepsilon}) \leq \varepsilon.$$

PREUVE :

- On cherche $\theta_{\phi,\varepsilon}$ sous la forme

$$\theta_{\phi,\varepsilon} = \sum_{\nu=0}^{+\infty} 2^{-\alpha_\nu}$$

où (α_ν) est une suite strictement croissante d'entiers naturels.
Pour tout $n \in [\frac{x}{4}, x]$ tel que $n = 2^{\lfloor \log_2 y \rfloor} k$ ($k \in \mathbf{N}$), on a:

$$\|n\theta_{\phi,\varepsilon}\| = \|k \sum_{\nu=0}^{+\infty} 2^{\lfloor \log_2 y \rfloor - \alpha_\nu}\| = \|k \sum_{\substack{\nu \\ \alpha_\nu > \lfloor \log_2 y \rfloor}} 2^{\lfloor \log_2 y \rfloor - \alpha_\nu}\| \leq k 2^{\lfloor \log_2 y \rfloor + 1 - \min\{\alpha_\nu > \lfloor \log_2 y \rfloor\}}$$

soit:

$$M(x,y,\theta_{\phi,\varepsilon}) \leq \frac{2x}{2^{\min\{\alpha_\nu > \lfloor \log_2 y \rfloor\}}}. \tag{27}$$

- On définit alors la suite $(x_q)_{q \in \mathbf{N}}$ de la manière suivante. On pose:

$$\begin{cases} x_0 \in \mathbf{N}^* \ \textbf{quelconque} \\ \alpha_0 = \max\{1 + \lfloor \log_2 \phi(x_0) \rfloor, 2 + \lfloor \log_2 x_0 - \log_2 \varepsilon \rfloor\} \end{cases}$$

puis, par récurrence:

$$\begin{cases} x_{q+1} > x_q \text{ tel que } \lfloor \log_2 \phi(x_{q+1}) \rfloor \geq \alpha_q \\ \alpha_{q+1} = \max\{1 + \lfloor \log_2 \phi(x_{q+1}) \rfloor, 2 + \lfloor \log_2 x_{q+1} - \log_2 \varepsilon \rfloor, \alpha_q + (q+1)\} \end{cases}$$

- Comme on a:

$$\forall q \in \mathbf{N}, \alpha_{\mathbf{q+1}} \geq \alpha_{\mathbf{q}} + (\mathbf{q} + \mathbf{1}),$$

la suite (α_q) est strictement croissante. De plus $\theta_{\phi,\varepsilon}$ est irrationnel (sinon (α_q) serait périodique et $\alpha_{q+1} - \alpha_q$ serait borné).
- Soit $q \in \mathbf{N}$. Par construction, on a:

$$\alpha_q = \min\{\alpha_\nu > \lfloor \log_2 \phi(x_q) \rfloor\}.$$

En effet $\alpha_q > \lfloor \log_2 \phi(x_q) \rfloor$ et $\forall \nu < q$, $\alpha_\nu \leq \alpha_{q-1} \leq \lfloor \log_2 \phi(x_q) \rfloor$.
Donc, d'après (27), on a bien défini une suite strictement croissante (x_q) telle que:

$$\forall q \in \mathbf{N}, \mathbf{M}(\mathbf{x_q}, \phi(\mathbf{x_q}), \theta_{\phi,\varepsilon}) \leq \frac{\mathbf{2x_q}}{\mathbf{2}^{\alpha_\mathbf{q}}} \leq \varepsilon.$$

e) Conclusion

On peut maintenant regrouper tous les résultats obtenus précédemment.
On choisit $\varepsilon > 0$ tel que:

$$(1 - \log 2) - \pi(2 - \log 2)\varepsilon = A > 0.$$

On prend la fonction $\phi = \log$. Elle vérifie bien les hypothèses du lemme 7, ce qui fournit un irrationnel $\theta_{\log,\varepsilon}$ et une suite (x_q). On a alors, d'après (26):

$$\forall q \in \mathbf{N}, |\mathbf{S}(\mathbf{x_q},\theta_{\log,\varepsilon})| \geq \mathbf{A}\, \mathbf{S}(\mathbf{x_q},\mathbf{0}) + \mathcal{O}(\mathbf{x_q} \log \mathbf{x_q} \log\log \mathbf{x_q}),$$

où (x_q) est une suite strictement croissante d'entiers naturels. Donc:

$$|S(x,\theta_{\log,\varepsilon})| = \Omega(S(x,0)),$$

ce qui termine la démonstration du théorème 3.

Références

[1] S. Chowla, *Some problems of diophantine approximation (I)*, Math. Zeitschrift, **33** (1931), 544-563.

[2] H. Daboussi, *On some Exponential Sums*, in *Analytic Number Theory, Proceedings of a Conference in honour of Paul T. Bateman*, Birkhäuser, Boston (1990).

[3] H. Daboussi & H. Delange, *Quelques propriétés des fonctions multiplicatives de module au plus égal à 1*, C.R. Acad. Sci. Paris, Sér. A, **278** (1974), 657-660.

[4] H. Daboussi & H. Delange, *On multiplicative arithmetical functions whose modulus does not exceed one*, J. London. Math. Soc., (2) **26** (1982), 245-264.

[5] H. Davenport, *On some infinite series involving arithmetical functions (II)*, Quarterly J. Math, **8** (1937), 313-320.

[6] H. Delange, *Sur les fonctions arithmétiques multiplicatives*, Ann. Sci. Ec. Norm. Sup., 3^{e} série, **78** (1961), 273-304.

[7] Y. Dupain, R.R. Hall & G. Tenenbaum, *Sur l'équirépartition modulo 1 de certaines fonctions de diviseurs*, J. London. Math. Soc., (2) **26** (1982), 397-411.

[8] P. Erdös, *Some remarks on diophantine approximations*, J. Indian. Math. Soc., **12** (1948), 67-74.

[9] K.H. Indlekofer, *Properties of uniformly summable multiplicative functions*, Periodica Mathematica Hungarica, **17** (1986), 143-161.

[10] H.L. Montgomery & R.C. Vaughan, *On exponential sums with multiplicative coefficients*, Inventiones Math., **43** (1977), 69-82.

[11] G. Tenenbaum, *Introduction à la théorie analytique et probabiliste des nombres*, Publications de l'Institut Élie Cartan, Nancy (1990).

Louis GOUBIN
URA D0752
Département de Mathématiques
Bâtiment 425
Université de Paris XI - Orsay
91405 Orsay Cedex
France