Sommes d'exponentielles à coefficients multiplicatifs et entiers sans grand facteur premier

Louis Goubin

28 juin 1993

1. Introduction

En utilisant des résultats sur la répartition dans les progressions arithmétiques des entiers ayant de petits facteurs premiers, E. Fouvry et G. Tenenbaum ([3]) ont montré le résultat suivant:

Théorème A. (Fouvry, Tenenbaum)

Soit $\theta \in]0,1[$. *Posons* $m(\theta) := \begin{cases} \frac{\Lambda(q)}{\phi(q)} & si\ \theta = \frac{a}{q},\ avec\ (a,q) = 1 \\ 0 & si\ \theta \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{Q} \end{cases}$

Alors on a:

$$\lim_{y \to +\infty} \sum_{\substack{n=1 \\ P(n) \leq y}}^{+\infty} \frac{e(n\theta)}{n} = \log(\frac{1}{1 - e(\theta)}) + m(\theta) \tag{1}$$

où $P(n)$ désigne le plus grand facteur premier de n (avec la convention $P(1) = 1$).

Cela répond à une question posée par Mauclaire, qui avait conjecturé que:

$$\forall \theta \in]0,1[, \lim_{y \to +\infty} \frac{1}{\log y} \sum_{\substack{n=1 \\ P(n) \leq y}}^{+\infty} \frac{e(n\theta)}{n} = 0 \tag{2}$$

et l'avait établi pour presque tout θ (cf [6], page 36).

Nous allons nous intéresser plus généralement au comportement quand y tend vers $+\infty$ de

$$\frac{1}{\log y} \sum_{\substack{n=1 \\ P(n) \leq y}}^{+\infty} \frac{e(n\theta)}{n} f(n)$$

lorsque f est une fonction multiplicative à valeurs dans le disque unité.

Dans le cas où θ est irrationnel, on obtient le résultat suivant:

Théorème 1. *Soit $\theta \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}$ et f multiplicative à valeurs dans le disque unité. Alors:* $\displaystyle\lim_{y\to+\infty} \frac{1}{\log y} \sum_{\substack{n=1\\ P(n)\le y}}^{+\infty} \frac{e(n\theta)}{n} f(n) = 0.$

Pour θ rationnel on obtient deux types de résultats selon le comportement des séries $\sum_p \frac{1-\Re e f(p)\chi(p)}{p}$, où χ désigne un caractère de Dirichlet. C'est Halász qui le premier a mis en évidence cette distinction (cf [4] ou [2]).

Théorème 2. *Soit f une fonction multiplicative à valeurs dans le disque unité. Soit $\theta = \frac{a}{q}$ avec $(a,q) = 1$. On suppose: $\forall \chi \bmod q$, $\sum_p \frac{1-\Re e f(p)\chi(p)}{p} = +\infty$. Alors:* $\displaystyle\lim_{y\to+\infty} \frac{1}{\log y} \sum_{\substack{n=1\\ P(n)\le y}}^{+\infty} \frac{e(n\theta)}{n} f(n) = 0.$

Théorème 3. *Soit f une fonction multiplicative à valeurs dans le disque unité. Soit $\theta = \frac{a}{q}$ avec $(a,q) = 1$. On suppose: $\exists \chi \bmod q$, $\sum_p \frac{1-\Re e f(p)\chi(p)}{p} < +\infty$. Soit $\chi^* \bmod m^*$ le caractère primitif équivalent à χ. Alors on a:* $\displaystyle\frac{1}{\log y} \sum_{\substack{n=1\\ P(n)\le y}}^{+\infty} \frac{e(n\theta)}{n} f(n) = e^\gamma \chi^*(a) K(q) \exp(iA(y)) + o(1),$ *avec* $\displaystyle A(y) := \sum_{p\le y} \frac{\Im m \chi^*(p) f(p)}{p}$

et $$K(q) := \tau(\overline{\chi^*}) \sum_{m^*|m|q} \{\frac{1}{m}\mu(\frac{m}{m^*})\overline{\chi^*(\frac{m}{m^*}\prod_{\substack{p|\frac{q}{m}\\ p\nmid m}} p^{v_p(\frac{q}{m})})} \exp(-i\sum_{\substack{p|m\\ p\nmid m^*}} \frac{1}{p}\Im m \chi^*(p) f(p))$$
$$\prod_{\substack{p|\frac{q}{m}\\ p|m}} \frac{f(p^{v_p(\frac{q}{m})})}{p^{v_p(\frac{q}{m})}} \prod_{p\nmid m}(1-\frac{1}{p}) \sum_{r=v_p(\frac{q}{m})}^{+\infty} \frac{\chi^*(p^r) f(p^r)}{p^r} \exp(-\frac{i}{p}\Im m \chi^*(p) f(p))\}.$$

Or, pour une fonction multiplicative à valeurs dans le disque unité, une condition suffisante pour avoir $\forall \chi$, $\sum_p \frac{1-\Re e f(p)\chi(p)}{p} = +\infty$ est (cf par exemple [2]):

$$\exists \rho \neq 1, \quad \sum_{\substack{p\le x\\ f(p)\neq\rho}} \frac{1}{p} = o(\log\log x).$$

On obtient ainsi comme conséquence des théorèmes 1 et 2:

Corollaire 1. *Soit f une fonction multiplicative à valeurs dans le disque unité. On suppose que $\exists \rho \neq 1$,* $\displaystyle\sum_{\substack{p\le x\\ f(p)\neq\rho}} \frac{1}{p} = o(\log\log x)$

Alors $\forall\theta\in\mathbf{R}$, $\lim_{y\to\infty}\frac{1}{\log y}\sum_{\substack{n=1\\P(n)\le y}}^{+\infty}\frac{e(n\theta)}{n}f(n)=0.$

On peut appliquer ceci aux fonctions de Möbius et de Liouville:

Corollaire 2. *Pour tout* $\theta\in\mathbf{R}$, *on a:* $\lim_{y\to\infty}\frac{1}{\log y}\sum_{\substack{n=1\\P(n)\le y}}^{+\infty}\frac{e(n\theta)}{n}\mu(n)=0$

et $\lim_{y\to\infty}\frac{1}{\log y}\sum_{\substack{n=1\\P(n)\le y}}^{+\infty}\frac{e(n\theta)}{n}\lambda(n)=0.$

Lorsque f est réelle et vérifie $\sum_p\frac{1-f(p)}{p}<+\infty$, on obtient, en appliquant le théorème 3 avec $\chi=\mathbf{1}$, $m^*=1$, $A\equiv 0$:

Corollaire 3. *Soit* f *une fonction multiplicative à valeurs dans* $[-1{,}1]$. *Soit* $\theta=\frac{a}{q}$, *avec* $(a{,}q)=1$. *On suppose* $\sum_p\frac{1-f(p)}{p}<+\infty$

Alors: $\frac{1}{\log y}\sum_{\substack{n=1\\P(n)\le y}}^{+\infty}\frac{e(n\theta)}{n}f(n)=e^{\gamma}K(q)+o(1)\quad(y\to+\infty),$

avec $K(q):=\sum_{m|q}\frac{\mu(m)}{m}\prod_{\substack{p|m\\p|\frac{q}{m}}}\frac{f(p^{v_p(\frac{q}{m})})}{p^{v_p(\frac{q}{m})}}\prod_{p\nmid m}(1-\frac{1}{p})\sum_{r=v_p(\frac{q}{m})}^{+\infty}\frac{f(p^r)}{p^r}.$

On peut appliquer ce résultat par exemple aux fonctions $f(n)=1$, ce qui (avec le théorème 1) redonne (2) ($K(q)$ est nul dans ce cas), $f(n)=\frac{\phi(n)}{n}$ ou $f(n)=\mu^2(n)$.
On note id et η les fonctions multiplicatives définies respectivement par $id(n)=n$ et $\eta(n)=\begin{cases}1 & \text{si } n=1\\ 0 & \text{sinon}\end{cases}$ (η est l'élément neutre pour la convolution de Dirichlet).

Corollaire 4. *Soit* $\theta=\frac{a}{q}$, *avec* $(a{,}q)=1$. *Alors on a* $(y\to+\infty)$*:*

$$\frac{1}{\log y}\sum_{\substack{n=1\\P(n)\le y}}^{+\infty}\frac{e(n\theta)}{n}=e^{\gamma}\eta(q)+o(1),$$

$$\frac{1}{\log y}\sum_{\substack{n=1\\P(n)\le y}}^{+\infty}\frac{e(n\theta)}{n}\frac{\phi(n)}{n}=\frac{6e^{\gamma}\mu(q)}{\pi^2q\phi(q)}\prod_{p|q}(1+\frac{1}{p})^{-1}+o(1),$$

$$\frac{1}{\log y}\sum_{\substack{n=1\\P(n)\le y}}^{+\infty}\frac{e(n\theta)}{n}\mu^2(n)=\frac{6e^{\gamma}}{\pi^2q}\prod_{p|q}(1+\frac{1}{p})^{-1}\sum_{m|q}\frac{m\mu(m)}{\phi(m)}\mu^2(\frac{q}{m})+o(1).$$

Preuve :

– Pour $f=\mathbf{1}$, on a
$$\begin{aligned}K(q)&=\sum_{m|q}\frac{\mu(m)}{m}\prod_{p|\frac{q}{m}p|m}p^{-v_p(\frac{q}{m})}\prod_{p\nmid m}(1-\frac{1}{p})\frac{1}{p^{v_p(\frac{q}{m})}}\frac{1}{1-\frac{1}{p}}\\&=\sum_{m|q}\frac{\mu(m)}{m}\prod_{p|\frac{q}{m}}p^{-v_p(\frac{q}{m})}\\&=\frac{1}{q}\sum_{m|q}\mu(m)=\eta(q).\end{aligned}$$

– Pour $f(n)=\frac{\phi(n)}{n}$, on a:

$$K(q)=\sum_{m|q}\frac{\mu(m)}{m}\prod_{\substack{p|\frac{q}{m}\\ p|m}}(1-\tfrac{1}{p})p^{-v_p(\frac{q}{m})}\prod_{\substack{p\nmid m\\ p|\frac{q}{m}}}(1-\tfrac{1}{p})\sum_{r=v_p(\frac{q}{m})}^{+\infty}\frac{1-\frac{1}{p}}{p^r}$$

$$\times\prod_{\substack{p\nmid m\\ p\nmid\frac{q}{m}}}(1-\tfrac{1}{p})(1+\sum_{r=1}^{+\infty}\frac{1-\frac{1}{p}}{p^r})$$

$$=\sum_{m|q}\frac{\mu(m)}{m}\prod_{p|\frac{q}{m}}(1-\tfrac{1}{p})\prod_{p|\frac{q}{m}}p^{-v_p(\frac{q}{m})}\prod_{\substack{p\nmid m\\ p\nmid\frac{q}{m}}}(1-\tfrac{1}{p^2}),$$

avec $\prod_{\substack{p\nmid m\\ p\nmid\frac{q}{m}}}(1-\frac{1}{p^2})=\prod_p(1-\frac{1}{p^2})\prod_{p|q}(1-\frac{1}{p})^{-1}\prod_{p|q}(1+\frac{1}{p})^1=\frac{6q}{\pi^2\phi(q)}\prod_{p|q}(1+\frac{1}{p})^{-1}$.

Donc $K(q)=\sum_{m|q}\frac{\mu(m)}{m}\frac{\phi(\frac{q}{m})}{\frac{q}{m}}\frac{m}{q}\frac{6q}{\pi^2\phi(q)}\prod_{p|q}(1+\frac{1}{p})^{-1}$

$$=\frac{6}{\pi^2\phi(q)}\prod_{p|q}(1+\tfrac{1}{p})^{-1}\sum_{m|q}\frac{\phi(m)}{m}\mu(\tfrac{q}{m})$$

$$=\frac{6\mu(q)}{\pi^2q\phi(q)}\prod_{p|q}(1+\tfrac{1}{p})^{-1},$$

car $\phi*\mathbf{1}=id\Rightarrow\phi=\mu*id\Rightarrow\frac{\phi}{id}*\mu=\frac{\mu}{id}*\mathbf{1}*\mu=\frac{\mu}{id}$.

– Pour $f=\mu^2$, seuls les m tels que $\frac{q}{m}$ est sans facteur carré interviennent dans $K(q)$.

En effet, si on suppose $p^2|\frac{q}{m}$, suivant que $p|m$ ou $p\nmid m$, la contribution de m dans $K(q)$ contient le facteur $f(p^{v_p(\frac{q}{m})})$ ou le facteur $\sum_{r=v_p(\frac{q}{m})}^{+\infty}\frac{f(p^r)}{p^r}$, qui sont tous les deux nuls.

Donc $K(q)=\sum_{m|q}\mu^2(\frac{q}{m})\frac{\mu(m)}{m}(\prod_{\substack{p|m\\ p|\frac{q}{m}}}p)^{-1}\prod_{\substack{p\nmid m\\ p|\frac{q}{m}}}(1-\frac{1}{p})\frac{1}{p}\prod_{\substack{p\nmid m\\ p\nmid\frac{q}{m}}}(1-\frac{1}{p^2})$

$$=\sum_{m|q}\mu^2(\tfrac{q}{m})\frac{\mu(m)}{m}\frac{m}{q}\frac{6q}{\pi^2\phi(q)}\prod_{\substack{p\nmid m\\ p|\frac{q}{m}}}(1-\tfrac{1}{p})\prod_{p|q}(1+\tfrac{1}{p})^{-1}$$

avec $\prod_{\substack{p\nmid m\\ p|\frac{q}{m}}}(1-\frac{1}{p})=\frac{\phi(q)}{q}\frac{m}{\phi(m)}$

d'où $K(q)=\frac{6}{\pi^2q}\prod_{p|q}(1+\frac{1}{p})^{-1}\sum_{m|q}\frac{m\mu(m)}{\phi(m)}\mu^2(\frac{q}{m})$.

En fait, en utilisant les propriétés élémentaires des fonctions L, on peut retrouver (1) dans le cas rationnel, avec en outre une indication de la vitesse de convergence:

Théorème 4. *Soit $\theta=\frac{a}{q}$ avec $(a,q)=1$ et $q>1$. Soit $\varepsilon>0$ et $K>0$.*

Dans le domaine $q^{\frac{1}{2}+\varepsilon}\log q\le K\log y$, on a uniformément:

$$\sum_{\substack{n=1\\ P(n)\le y}}^{+\infty}\frac{e(n\theta)}{n}=\log\Big(\frac{1}{1-e(\theta)}\Big)+\frac{\Lambda(q)}{\phi(q)}+\mathcal{O}_{K,\varepsilon}\Big(\frac{q\log q}{\log y}\Big).$$

De même on obtient pour μ un résultat plus précis que celui du corollaire 2:

Théorème 5. *Soit* $\theta = \frac{a}{q}$ *avec* $(a,q) = 1$ *et* $q > 1$. *Soit* $\varepsilon > 0$ *et* $K > 0$. *Dans le domaine* $q^{\frac{1}{2}+\varepsilon} \log q \leq K \log y$, *on a uniformément:*

$$\sum_{\substack{n=1 \\ P(n)\leq y}}^{+\infty} \frac{e(n\theta)}{n}\mu(n) = \frac{1}{\phi(q)} \sum_{b=1}^{q} e\Big(\frac{ab}{q}\Big) \sum_{\chi \bmod q} \frac{\overline{\chi}(b)}{L(1,\chi)} + \mathcal{O}_{K,\varepsilon}\Big(\frac{q\log q}{\log y}\Big).$$

Comme me l'a signalé G. Tenenbaum ([8]), la méthode utilisée dans [3] permet d'obtenir un terme d'erreur en $\mathcal{O}(\rceil^{-\rfloor\sqrt{\log \dagger}})$, uniformément pour $y \geq \exp(q^{\frac{1}{2}+\varepsilon})$, ce qui est beaucoup plus précis que le résultat obtenu dans le théorème 4.

2. Le cas où θ est irrationnel

On utilise le théorème suivant (cf [1]), dû à H.Daboussi (Montgomery et Vaughan en ont donné ensuite une version effective dans [7]):

Théorème B. (Daboussi) *Soit* $\theta \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}$. *Alors on a, uniformément pour* g *multiplicative à valeurs dans le disque unité:*

$$\sum_{n\leq x} g(n)e(n\theta) = o(x) \qquad (x \to +\infty)$$

On aura besoin également de la majoration classique suivante, dont on peut trouver la démonstration par exemple dans [9] (théorème 1, page 396). Elle repose sur la méthode de Rankin (cf [5], lemme 4.1, page 131).

Lemme 1. $\psi(x,y) := \sum_{\substack{n\leq x \\ P(n)\leq y}} 1 \ll x \exp\Big(-\frac{\log x}{2\log y}\Big)$

Démonstration du théorème 1 :

– En sommant par parties, on obtient:

$$\sum_{\substack{n\leq N \\ P(n)\leq y}} \frac{e(n\theta)}{n} f(n) = \frac{1}{N} \sum_{\substack{n\leq N \\ P(n)\leq y}} f(n)e(n\theta) + \int_1^N \frac{dx}{x^2} \sum_{\substack{n\leq x \\ P(n)\leq y}} f(n)e(n\theta),$$

Or, d'après le lemme 1, on a:

$$\Big|\sum_{\substack{n\leq N \\ P(n)\leq y}} f(n)e(n\theta)\Big| \leq \psi(N,y) \ll N\exp\Big(-\frac{\log N}{2\log y}\Big) = o(N),$$

et $\frac{1}{x^2} \sum_{\substack{n\leq x \\ P(n)\leq y}} f(n)e(n\theta) \ll \frac{1}{x}\exp\Big(-\frac{\log x}{2\log y}\Big)$.

Donc $\sum_{\substack{n=1 \\ P(n)\leq y}}^{+\infty} \frac{e(n\theta)}{n} f(n) = \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2} \sum_{\substack{n\leq x \\ P(n)\leq y}} f(n)e(n\theta).$

– Posons pour $y \geq 2$, $f_y(n) = \begin{cases} f(n) & \text{si } P(n) \leq y \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

f_y est encore multiplicative à valeurs dans le disque unité.

Soit $\varepsilon > 0$. Le lemme 1 fournit une constante $A > 0$ telle que

$\forall x \geq 2$, $\forall y \geq 2$, $\psi(x,y) \leq Ax\exp(-\frac{\log x}{2\log y})$.

Prenons $\varepsilon' > 0$ assez petit pour avoir $2(\varepsilon' A + \varepsilon' \log\frac{1}{\varepsilon'}) < \varepsilon$.

D'après le théorème B, $\exists x_0(\varepsilon')$, $\forall x \geq x_0$, $\forall y \geq 2$, $|\frac{1}{x}\sum_{n\leq x} f_y(n)e(n\theta)| < \varepsilon'$.

$$\sum_{\substack{n=1\\P(n)\leq y}}^{+\infty} \frac{e(n\theta)}{n}f(n) = \int_1^{y^k}\frac{dx}{x^2}\sum_{n\leq x} f_y(n)e(n\theta) + \int_{y^k}^{+\infty}\frac{dx}{x^2}\sum_{n\leq x} f_y(n)e(n\theta).$$

– $$|\int_{y^k}^{+\infty}\frac{dx}{x^2}\sum_{n\leq x} f_y(n)e(n\theta)| \leq \int_{y^k}^{+\infty}\frac{dx}{x^2}\psi(x,y) \leq A\int_{y^k}^{+\infty}\frac{dx}{x}\exp(-\frac{\log x}{2\log y})$$
$$\leq A\log y\int_k^{+\infty} e^{-\frac{u}{2}}du = 2Ae^{-\frac{k}{2}}\log y.$$

– $$|\int_1^{y^k}\frac{dx}{x^2}\sum_{n\leq x} f_y(n)e(n\theta)| \leq \int_1^{y^k}\frac{dx}{x}|\frac{1}{x}\sum_{n\leq x} f_y(n)e(n\theta)|$$
$$\leq \int_1^{x_0}\frac{dx}{x} + \int_{x_0}^{y^k}\varepsilon'\frac{dx}{x} \leq \log x_0 + \varepsilon' k\log y.$$

– Donc $|\frac{1}{\log y}\sum_{\substack{n=1\\P(n)\leq y}}^{+\infty}\frac{e(n\theta)}{n}f(n)| \leq k\varepsilon' + 2Ae^{-\frac{k}{2}} + \frac{\log x_0}{\log y}$.

On prend $k = 2\log\frac{1}{\varepsilon'}$, ce qui donne:

$$|\frac{1}{\log y}\sum_{\substack{n=1\\P(n)\leq y}}^{+\infty}\frac{e(n\theta)}{n}f(n)| \leq \underbrace{2(A\varepsilon' + \varepsilon'\log\frac{1}{\varepsilon'})}_{<\varepsilon} + \frac{\log x_0}{\log y}$$

Donc $\exists y_0$, $\forall y \geq y_0$, $|\frac{1}{\log y}\sum_{\substack{n=1\\P(n)\leq y}}^{+\infty}\frac{e(n\theta)}{n}f(n)| < \varepsilon$, d'où le théorème.

3. Le cas où θ est rationnel

On suppose dorénavant $\theta = \frac{a}{q}$, avec $(a,q) = 1$. La première étape consiste à se ramener aux caractères de Dirichlet:

Lemme 2. *Pour $y \geq q$, on a* $\sum_{\substack{n=1\\P(n)\leq y}}^{+\infty}\frac{e(n\theta)}{n}f(n) = \sum_{m|q}\sum_{\substack{c=1\\(c,m)=1}}^{m} e(\frac{ac}{m})H_{m,c}(y)$, *avec:*

(i) si $\exists p$, $p|\frac{q}{m}$, $p\nmid m$ *tel que* $\forall r \geq 0$, $f(p^{r+v_p(\frac{q}{m})}) = 0$, *alors* $H_{m,c}(y) = 0$,

(ii) sinon $\forall y \geq \delta$, $H_{m,c}(y) = \frac{1}{\phi(m)}\frac{f(\frac{q}{m}\delta)}{\frac{q}{m}\delta}\sum_{\chi \bmod m}\overline{\chi(c)}\chi(\delta)\sum_{\substack{k=1\\P(k)\leq y}}^{+\infty}\frac{f_m(k)\chi(k)}{k}$,

où $\delta = \prod_{\substack{p|\frac{q}{m}\\p\nmid m}} p^{\alpha_p}$, $\alpha_p = \min\{r \geq 0,\ f(p^{r+v_p(\frac{q}{m})}) \neq 0\}$, *et f_m est la fonction multiplicative définie par*

$$f_m(p^l) = \begin{cases} \frac{f(p^{v_p(\frac{q}{m})+\alpha_p+l})}{f(p^{v_p(\frac{q}{m})+\alpha_p})} & si\ p|\frac{q}{m}\ \ et\ p\nmid m \\ f(p^l) & sinon \end{cases}$$

Preuve :

- $$\sum_{\substack{n\leq x\\ P(n)\leq y}} \frac{e(n\theta)}{n} f(n) = \sum_{b=1}^{q} e(\tfrac{ab}{q}) \sum_{\substack{k\leq x\\ P(k)\leq y\\ k\equiv b \bmod q}} \frac{f(k)}{k} = \sum_{b=1}^{q} e(\tfrac{ab}{q}) \sum_{\substack{k\leq \frac{x}{(b,q)}\\ P(k)\leq y\\ k\equiv \frac{b}{(b,q)} \bmod \frac{q}{(b,q)}}} \frac{f(k(b,q))}{k(b,q)},$$

  car $y \geq q$.

  Posons $m := \frac{q}{(b,q)}$ et $c := \frac{b}{(b,q)}$. On obtient:

  $$\sum_{\substack{n\leq x\\ P(n)\leq y}} \frac{e(n\theta)}{n} f(n) = \sum_{m|q} \sum_{\substack{c=1\\ (c,m)=1}}^{m} e(\tfrac{ac}{m}) \sum_{\substack{k\leq \frac{mx}{q}\\ P(k)\leq y\\ k\equiv c \bmod m}} \frac{f(\frac{q}{m}k)}{\frac{q}{m}k}$$

  Or $\displaystyle\sum_{\substack{k\leq \frac{mx}{q}\\ P(k)\leq y\\ k\equiv c \bmod m}} \frac{f(\frac{q}{m}k)}{k} = \frac{q}{mx} \sum_{\substack{k\leq \frac{mx}{q}\\ P(k)\leq y\\ k\equiv c \bmod m}} f(\tfrac{q}{m}k) + \int_1^{\frac{mx}{q}} \frac{dt}{t^2} \sum_{\substack{k\leq t\\ P(k)\leq y\\ k\equiv c \bmod m}} f(\tfrac{q}{m}k)$

  avec $\displaystyle|\sum_{\substack{k\leq t\\ P(k)\leq y\\ k\equiv c \bmod m}} f(\tfrac{q}{m}k)| \leq \psi(t,y) \ll t\exp(-\frac{\log t}{2\log y})$, ce qui donne la convergence absolue de la série pour $y \geq 2$.

  Donc $\displaystyle\sum_{\substack{n=1\\ P(n)\leq y}}^{+\infty} \frac{e(n\theta)}{n} f(n) = \sum_{m|q} \sum_{\substack{c=1\\ (c,m)=1}}^{m} e(\tfrac{ac}{m}) H_{m,c}(y)$,

  avec $\displaystyle H_{m,c}(y) = \frac{m}{q} \sum_{\substack{k=1\\ P(k)\leq y\\ k\equiv c \bmod m}}^{+\infty} \frac{f(\frac{q}{m}k)}{k}$

- Posons $\displaystyle\delta_1 := \prod_{\substack{p|\frac{q}{m}\\ p|m}} p^{v_p(\frac{q}{m})}$ et $\displaystyle\delta_2 := \prod_{\substack{p|\frac{q}{m}\\ p\nmid m}} p^{v_p(\frac{q}{m})}$.

  On a $k \equiv c \bmod m \Rightarrow (k,m) = 1 \Rightarrow (k,\delta_1) = 1 \Rightarrow (\delta_2 k,\delta_1) = 1$
  $\Rightarrow f(\frac{q}{m}k) = f(\delta_1)f(\delta_2 k)$,

  d'où $\displaystyle H_{m,c}(y) = \frac{m}{q} f(\delta_1) \sum_{\substack{k=1\\ P(k)\leq y\\ k\equiv c \bmod m}}^{+\infty} \frac{f(\delta_2 k)}{k}$.

- Supposons d'abord qu'il existe $p|\delta_2$ tel que $\forall r \geq 0,\ f(p^{r+v_p(\frac{q}{m})}) = 0$.
  Alors $\forall k \geq 1,\ f(\delta_2 k) = 0$, car $v_p(\delta_2 k) \geq v_p(\frac{q}{m})$.
  Donc $H_{m,c}(y) = 0$.

- Dans le cas contraire, δ est bien défini.
  Si $\delta \nmid k$, alors il existe $p|\delta$ tel que $v_p(k) < v_p(\delta)$, d'où $v_p(\delta_2 k) = v_p(\delta_2) + v_p(k) < v_p(\frac{q}{m}) + \alpha_p$. La minimalité de α_p donne alors $f(\delta_2 k) = 0$.
  On peut donc se limiter aux k qui sont multiples de δ, ce qui donne:

$H_{m,c}(y) = \frac{m}{q} f(\delta_1) \sum_{\substack{k=1 \\ P(k)\le y \\ \delta k \equiv c \bmod m}}^{+\infty} \frac{f(\delta_2 \delta k)}{\delta k}$, car pour $y \ge \delta$ on a $P(\delta k) \le y \Leftrightarrow P(k) \le y$,

$$= \frac{m}{q\delta} f(\delta_1) \sum_{\substack{k=1 \\ P(k)\le y}}^{+\infty} \frac{f(\delta_2\delta k)}{k} \frac{1}{\phi(m)} \sum_{\chi \bmod m} \overline{\chi(c)}\chi(\delta k)$$

$$= \frac{m}{\phi(m)} \frac{f(\delta_1)}{q\delta} \sum_{\chi \bmod m} \overline{\chi(c)}\chi(\delta) \sum_{\substack{k=1 \\ P(k)\le y}}^{+\infty} \frac{f(\delta_2\delta k)\chi(k)}{k}.$$

Or on a: $\forall k \in \mathbf{N}^*$, $f(\delta_2\delta k) = f(\delta_2\delta) f_m(k)$.

En effet $\begin{cases} f(\delta_2\delta p^r) = f(\delta_2\delta)f(p^r) = f(\delta_2\delta)f_m(p^r) & \text{si } p \nmid \delta_2 \\ f(\delta_2\delta)f_m(p^r) = \frac{f(\delta_2\delta)}{f(p^{v_p(\delta_2\delta)})} f(p^{v_p(\delta_2\delta)+r}) = f(\delta_2\delta p^r) & \text{si } p|\delta_2 \end{cases}$

Donc $H_{m,c}(y) = \frac{m}{\phi(m)} \frac{f(\delta_1)f(\delta_2\delta)}{q\delta} \sum_{\chi \bmod m} \overline{\chi(c)}\chi(\delta) \sum_{\substack{k=1 \\ P(k)\le y}}^{+\infty} \frac{f_m(k)\chi(k)}{k}$,

ce qui termine la démonstration, car $(\delta_1,\delta_2\delta) = 1$.

a) On suppose $\forall \chi \bmod q$, $\sum_p \frac{1-\Re e f(p)\chi(p)}{p} = +\infty$.

La démonstration du théorème 2 utilise le résultat suivant, qui résulte imédiatement de $\log(1+z) = z + \mathcal{O}(|z|^2)$ (cf par exemple [2]):

Lemme 3. *Soit $(u_n)_{n\ge 1}$ et $(v_n)_{n\ge 1}$ deux suites de nombres complexes telles que*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} |u_n|^2 < +\infty \text{ et } \sum_{n=1}^{+\infty} |u_n - v_n| < +\infty.$$

Alors le produit infini $\prod_{n=1}^{+\infty}(1+u_n)e^{-v_n}$ est absolument convergent.

Démonstration du théorème 2 :

– D'après le lemme 2, il suffit de montrer que:

$$\forall m|q,\ \forall c,\ 1 \le c \le m,\ (c,m) = 1,\ H_{c,m}(y) = o(\log y) \quad (y \to +\infty).$$

On peut se placer dans le cas (ii), l'autre cas étant évident. On est donc ramené à montrer que: $\forall \chi \bmod m$, $\sum_{\substack{k=1 \\ P(k)\le y}}^{+\infty} \frac{f_m(k)\chi(k)}{k} = o(\log y) \quad (y \to +\infty)$.

$$\text{Or } \sum_{\substack{k=1 \\ P(k)\le y}}^{+\infty} \frac{f_m(k)\chi(k)}{k} = \prod_{p\le y} \sum_{\nu=0}^{+\infty} \frac{(\chi f_m)(p^\nu)}{p^\nu}$$

$$= \prod_{p\le \delta_2} \sum_{\nu=0}^{+\infty} \frac{(\chi f_m)(p^\nu)}{p^\nu} \prod_{\delta_2 < p \le y} \sum_{\nu=0}^{+\infty} \frac{(\chi f)(p^\nu)}{p^\nu} \quad (y \ge \delta_2).$$

Donc il suffit de montrer que $\prod_{\delta_2 < p \le y} \sum_{\nu=0}^{+\infty} \frac{(\chi f)(p^\nu)}{p^\nu} = o(\log y) \quad (y \to +\infty)$.

– On peut écrire:

$$\prod_{\delta_2<p\le y}(1-\tfrac{1}{p})\prod_{\delta_2<p\le y}\sum_{\nu=0}^{+\infty}\tfrac{(\chi f)(p^\nu)}{p^\nu}\prod_{\delta_2<p\le y}\exp(\tfrac{1-(\chi f)(p)}{p})=\prod_{\delta_2<p\le y}(1+u_p)e^{-v_p},$$

avec $u_p=\frac{(\chi f)(p)-1}{p}+\sum_{\nu=2}^{+\infty}\frac{(\chi f)(p^\nu)-(\chi f)(p^{\nu-1})}{p^\nu}$ et $v_p=\frac{(\chi f)(p)-1}{p}$.

Or $|u_p-v_p|=|\sum_{\nu=2}^{+\infty}\frac{(\chi f)(p^\nu)-(\chi f)(p^{\nu-1})}{p^\nu}|\le\sum_{\nu=2}^{+\infty}\frac{2}{p^\nu}=\frac{2}{p(p-1)}$,

donc $\sum_p|u_p-v_p|<+\infty$.

Par ailleurs $|u_p|^2\le 2|\frac{(\chi f)(p)-1}{p}|^2+2|\sum_{\nu=2}^{+\infty}\frac{(\chi f)(p^\nu)-(\chi f)(p^{\nu-1})}{p^\nu}|^2\le\frac{8}{p^2}(1+\frac{1}{(p-1)^2})$,

ce qui donne $\sum_p|u_p|^2<+\infty$.

Donc d'après le lemme 3, le produit infini $\prod_{p>\delta_2}(1+u_p)e^{-v_p}$ est absolument convergent.

Par conséquent:

$$\begin{aligned}|\prod_{\delta_2<p\le y}\sum_{\nu=0}^{+\infty}\tfrac{(\chi f)(p^\nu)}{p^\nu}| &= |\prod_{\delta_2<p\le y}(1+u_p)e^{-v_p}||\prod_{\delta_2<p\le y}(1-\tfrac{1}{p})^{-1}||\prod_{\delta_2<o\le y}e^{-v_p}|\\ &\ll \exp(-\sum_{\delta_2<p\le y}\tfrac{1-\Re e\chi f(p)}{p})\log y\end{aligned}$$

Or $\sum_{\delta_2<p\le y}\frac{1-\Re e\chi f(p)}{p}$ tend vers $+\infty$ par hypothèse.

Donc $\prod_{\delta_2<p\le y}\sum_{\nu=0}^{+\infty}\frac{(\chi f)(p^\nu)}{p^\nu}=o(\log y)\quad(y\to+\infty)$, ce qui termine la démonstration.

b) On suppose $\exists\chi \bmod q$, $\sum_p\frac{1-\Re e f(p)\chi(p)}{p}<+\infty$.

On note χ^* mod m^* l'unique caractère primitif équivalent à χ.

Lemme 4. *Soit $m|q$, $1\le c\le m$ tels que $(c,m)=1$.*

(i) Si $m^*\nmid m$, alors $H_{m,c}(y)=o(\log y)\quad(y\to+\infty)$.

(ii) Si $m^*|m$, alors quand $y\to+\infty$ on a:

$$\prod_{p\le y}(1-\tfrac{1}{p})H_{m,c}(y)=\tfrac{f(\delta_1)}{m\delta_1}\overline{\chi^*(c\delta_2)}\prod_{\substack{p\le y\\ p\nmid m}}(1-\tfrac{1}{p})\sum_{r=v_p(\frac{q}{m})}^{+\infty}\tfrac{\chi^*(p^r)f(p^r)}{p^r}+o(1).$$

où $\delta_1:=\prod_{\substack{p|\frac{q}{m}\\ p|m}}p^{v_p(\frac{q}{m})}$ *et* $\delta_2:=\prod_{\substack{p|\frac{q}{m}\\ p\nmid m}}p^{v_p(\frac{q}{m})}$.

Preuve :

– On sait (cf [2]) que $\sum_p\frac{1-\Re e f(p)\chi(p)}{p}\begin{cases}<+\infty & \text{si } \chi\sim\chi^*\\ =+\infty & \text{sinon}\end{cases}$

Donc le cas $m^*\nmid m$ se démontre comme dans le théorème 2.

– Supposons $m^*|m$ et $\forall p|\delta_2,\ \exists r\geq 0,\ f(p^{r+v_p(\frac{q}{m})})\neq 0$.

$\forall y\geq\delta,\ \prod_{p\leq y}(1-\frac{1}{p})H_{m,c}(y)=\frac{1}{\phi(m)}\frac{f(\frac{q}{m}\delta)}{\frac{q}{m}\delta}\sum_{\chi \bmod m}\overline{\chi(c)}\chi(\delta)\prod_{p\leq y}\sum_{\substack{k=1\\P(k)\leq y}}^{+\infty}\frac{f_m(k)\chi(k)}{k}$.

Il suffit de considérer le caractère $\chi_m \bmod m$ qui est équivalent à χ^* (les autres donnent une contribution en o(1) comme dans le théorème 2).

– On a $\prod_{p\leq y}(1-\frac{1}{p})\sum_{\substack{k=1\\P(k)\leq y}}^{+\infty}\frac{f_m(k)\chi_m(k)}{k}=\prod_{p\leq y}(1-\frac{1}{p})\sum_{r=0}^{+\infty}\frac{\chi_m(p^r)f_m(p^r)}{p^r}$

$$=\prod_{p|m}(1-\frac{1}{p})\prod_{\substack{p\leq y\\p\nmid m}}(1-\frac{1}{p})\sum_{r=0}^{+\infty}\frac{\chi^*(p^r)f_m(p^r)}{p^r}\ (y\geq q)$$

$$=\frac{\phi(m)}{m}\prod_{\substack{p\leq y\\p\nmid m}}(1-\frac{1}{p})\sum_{r=0}^{+\infty}\frac{\chi^*(p^r)f_m(p^r)}{p^r}.$$

Étudions d'abord les facteurs pour lesquels $p|\delta_2$. On a:

$$\forall r\geq 0,\frac{\chi^*(p^r)f_m(p^r)}{p^r}=\frac{1}{f(p^{v_p(\delta_2\delta)})}\frac{\chi^*(p^r)f(p^{v_p(\delta_2\delta)+r})}{p^r}$$

c'est-à-dire:

$$\forall r\geq 0,\frac{\chi^*(p^r)f_m(p^r)}{p^r}=\frac{\overline{\chi^*(p^{v_p(\delta_2\delta)})}p^{v_p(\delta_2\delta)}}{f(p^{v_p(\delta_2\delta)})}\frac{\chi^*(p^{v_p(\delta_2\delta)+r})f(p^{v_p(\delta_2\delta)+r})}{p^{v_p(\delta_2\delta)+r}}.$$

Donc:

$$\sum_{r=0}^{+\infty}\frac{\chi^*(p^r)f_m(p^r)}{p^r}=\frac{\overline{\chi^*(p^{v_p(\delta_2\delta)})}p^{v_p(\delta_2\delta)}}{f(p^{v_p(\delta_2\delta)})}\sum_{r=v_p(\delta_2\delta)}^{+\infty}\frac{\chi^*(p^r)f(p^r)}{p^r}.$$

On peut remplacer la condition $r\geq v_p(\delta_2\delta)$ par $r\geq v_p(\frac{q}{m})$, car on a $f(p^r)=$
0
quand $v_p(\frac{q}{m})\leq r<v_p(\frac{q}{m})+\alpha_p=v_p(\delta_2\delta)$.
Comme δ et δ_2 ont les mêmes facteurs premiers, on trouve pour $y\geq q(\geq\delta_2)$:

$$\prod_{p|\delta_2}(1-\frac{1}{p})\sum_{r=0}^{+\infty}\frac{\chi^*(p^r)f_m(p^r)}{p^r}=\frac{\overline{\chi^*(\delta_2\delta)}\delta_2\delta}{f(\delta_2\delta)}\prod_{p|\delta_2}(1-\frac{1}{p})\sum_{r=v_p(\frac{q}{m})}^{+\infty}\frac{\chi^*(p^r)f(p^r)}{p^r}.$$

Dans les autres facteurs (ceux pour lesquels $p\nmid\frac{q}{m}$), on a:

$$\sum_{r=0}^{+\infty}\frac{\chi^*(p^r)f_m(p^r)}{p^r}=\sum_{r=v_p(\frac{q}{m})}^{+\infty}\frac{\chi^*(p^r)f(p^r)}{p^r}.$$

– Finalement on trouve, pour $y \geq q$:
$\prod_{p\leq y}(1-\frac{1}{p})\sum_{\substack{k=1\\P(k)\leq y}}^{+\infty}\frac{f_m(k)\chi_m(k)}{k}=\frac{\phi(m)}{m}\frac{\overline{\chi^*(\delta_2\delta)}\delta_2\delta}{f(\delta_2\delta)}\prod_{\substack{p\leq y\\p\nmid m}}(1-\frac{1}{p})\sum_{r=v_p(\frac{q}{m})}^{+\infty}\frac{\chi^*(p^r)f(p^r)}{p^r}$
d'où:
$\prod_{p\leq y}(1-\frac{1}{p})H_{m,c}(y)=\frac{f(\frac{q}{m}\delta)}{q\delta}\overline{\chi^*(c)}\chi^*(\delta)\frac{\overline{\chi^*(\delta_2\delta)}\delta_2\delta}{f(\delta_2\delta)}\prod_{\substack{p\leq y\\p\nmid m}}(1-\frac{1}{p})\sum_{r=v_p(\frac{q}{m})}^{+\infty}\frac{\chi^*(p^r)f(p^r)}{p^r}+$
$o(1)$
$=\frac{f(\delta_1)}{m\delta_1}\overline{\chi^*(c\delta_2)}\prod_{\substack{p\leq y\\p\nmid m}}(1-\frac{1}{p})\sum_{r=v_p(\frac{q}{m})}^{+\infty}\frac{\chi^*(p^r)f(p^r)}{p^r}+o(1)$
et le résultat est encore vrai lorsque $\exists p$, $p|\frac{q}{m}$, $p\nmid m$, tel que $\forall r\geq 0$, $f(p^{r+v_p(\frac{q}{m})})=0$.

Pour simplifier ce résultat, on a besoin à nouveau du lemme 3. On obtient ainsi:

Lemme 5. *Soit $m|q$, $1\leq c\leq m$ tels que $(c,m)=1$. On suppose $m^*|m$. Alors:*

$$\prod_{p\leq y}(1-\frac{1}{p})H_{m,c}(y)=\overline{\chi^*(c)}B_m\exp(iA(y))+o(1)\quad (y\to+\infty)$$

avec $A(y)=\sum_{p\leq y}\frac{\Im m\chi^*(p)f(p)}{p}$

et $B_m=\frac{\overline{\chi^*(\delta_2)}f(\delta_1)}{m\delta_1}\exp(-i\sum_{\substack{p|m\\p\nmid m^*}}\frac{1}{p}\Im m\chi^*(p)f(p))$

$\prod_{p\nmid m}(1-\frac{1}{p})(\sum_{r=v_p(\frac{q}{m})}^{+\infty}\frac{f(p^r)\chi^*(p^r)}{p^r})\exp(-\frac{i}{p}\Im m\chi^*(p)f(p)),$

le produit infini dans B_m étant absolument convergent.

Preuve :

– Il suffit de montrer que le produit infini

$$\prod_{p\nmid m}(1-\frac{1}{p})(\sum_{r=v_p(\frac{q}{m})}^{+\infty}\frac{f\chi^*(p^r)}{p^r})\exp(-\frac{i\Im mf\chi^*(p)}{p})$$

est bien convergent. En effet on aura alors, pour $y\geq q$:
$\prod_{\substack{p\leq y\\p\nmid m}}(1-\frac{1}{p})\sum_{r=v_p(\frac{q}{m})}^{+\infty}\frac{f\chi^*(p^r)}{p^r}$
$=\prod_{\substack{p\leq y\\p\nmid m}}\exp(\frac{i\Im mf\chi^*(p)}{p})\prod_{\substack{p\leq y\\p\nmid m}}(1-\frac{1}{p})(\sum_{r=v_p(\frac{q}{m})}^{+\infty}\frac{f\chi^*(p^r)}{p^r})\exp(-\frac{i\Im mf\chi^*(p)}{p})$
$=e^{iA(y)}\prod_{p|m}\exp(-\frac{i\Im mf\chi^*(p)}{p})\{\prod_{p\nmid m}(1-\frac{1}{p})(\sum_{r=v_p(\frac{q}{m})}^{+\infty}\frac{f\chi^*(p^r)}{p^r})\exp(-\frac{i\Im mf\chi^*(p)}{p})+o(1)\}$
d'où $\prod_{p\leq y}(1-\frac{1}{p})H_{m,c}(y)=\overline{\chi^*(c)}B_m\exp(iA(y))+o(1)$ d'après le lemme 4.

– Si on pose $u_p = (1-\frac{1}{p})\sum_{r=v_p(\frac{q}{m})}^{+\infty}\frac{f\chi^*(p^r)}{p^r} - 1$ et $v_p = \frac{i}{p}\Im m f\chi^*(p)$, le terme général du produit infini s'écrit $(1+u_p)e^{-v_p}$. De plus, pour $p > \frac{q}{m}$, on a: $u_p = \sum_{r=1}^{+\infty}\frac{f\chi^*(p^r)-f\chi^*(p^{r-1})}{p^r}$ et $u_p - v_p = \frac{\Re e f\chi^*(p)-1}{p} + \sum_{r=2}^{+\infty}\frac{f\chi^*(p^r)-f\chi^*(p^{r-1})}{p^r}$, d'où $|u_p| \leq \frac{2}{p-1}$ et $|u_p - v_p| \leq \frac{1}{p}(1-\Re e f\chi^*(p)) + \frac{2}{p(p-1)}$.
Donc $\sum_p |u_p|^2 < +\infty$ et $\sum_p |u_p - v_p| < +\infty$, ce qui donne le résultat d'après le lemme 3.

Démonstration du théorème 3 : D'après les lemmes 2, 4 et 5, on a:
$$\prod_{p\leq y}(1-\tfrac{1}{p})\sum_{\substack{n=1\\P(n)\leq y}}^{+\infty}\frac{e(n\theta)}{n}f(n) = \sum_{m^*|m|q}\sum_{\substack{c=1\\(c,m)=1}}^{m} e(\tfrac{ac}{m})\{\overline{\chi^*(c)}B_m\exp(iA(y))+o(1)\}+o(1).$$
Or
$$\sum_{\substack{c=1\\(c,m)=1}}^{m} e(\tfrac{ac}{m})\overline{\chi^*(c)} = \sum_{\substack{c=1\\(c,m)=1}}^{m} e(\tfrac{ac}{m})\overline{\chi_m(c)} = \tau(\overline{\chi_m})\chi_m(a) = \tau(\overline{\chi^*})\mu(\tfrac{m}{m^*})\overline{\chi^*(\tfrac{m}{m^*})}\chi^*(a).$$
Donc
$$\prod_{p\leq y}(1-\tfrac{1}{p})\sum_{\substack{n=1\\P(n)\leq y}}^{+\infty}\frac{e(n\theta)}{n}f(n) = \chi^*(a)K(q)\exp(iA(y))+o(1),$$
avec $K(q) = \sum_{m^*|m|q}\tau(\overline{\chi^*})\mu(\frac{m}{m^*})\overline{\chi^*(\frac{m}{m^*})}B_m$.
ce qui termine la démonstration en reportant dans $K(q)$ la valeur de B_m et en utilisant la formule de Mertens: $\prod_{p\leq y}(1-\frac{1}{p}) \sim \frac{e^{-\gamma}}{\log y} \quad (y\to+\infty)$.

4. Le cas $f = 1$

a) Transformation de la somme

Posons $E(x,y;\theta) = \sum_{\substack{n\leq x\\P(n)\leq y}} e(n\theta)$. Dans la suite on prendra $\theta = \frac{a}{q}$, $(a,q)=1$.

$$E(x,y;\theta) = \sum_{\substack{n\leq x\\P(n)\leq y}} e(\frac{an}{q}) = \sum_{b=1}^{q} e(\frac{ab}{q})\sum_{\substack{n\leq x\\P(n)\leq y\\n\equiv b \bmod q}} 1 = \sum_{\substack{b=1\\P((b,q))\leq y}}^{q} e(\frac{ab}{q})\sum_{\substack{k\leq\frac{x}{(b,q)}\\P(k)\leq y\\k\equiv\frac{b}{(b,q)} \bmod \frac{q}{(b,q)}}} 1$$

Si on suppose $y \geq q$, la condition $P((b,q)) \leq y$ est toujours vérifiée, ce qui donne:

$$E(x,y;\theta) = \sum_{b=1}^{q} e(\frac{ab}{q})\sum_{\substack{k\leq\frac{x}{(b,q)}\\P(k)\leq y\\k\equiv\frac{b}{(b,q)} \bmod \frac{q}{(b,q)}}} 1$$

Posons $m = \frac{q}{(b,q)}$ et $c = \frac{b}{(b,q)}$. On obtient alors:

$$E(x,y;\theta) = \sum_{m|q} \sum_{\substack{c=1\\(c,m)=1}}^{m} e(\frac{ac}{m}) \sum_{\substack{k\le \frac{mx}{q}\\P(k)\le y\\k\equiv c \bmod m}} 1$$

puis, en utilisant l'orthogonalité des caractères:

$$E(x,y;\theta) = \sum_{m|q} \sum_{\substack{c=1\\(c,m)=1}}^{m} e(\frac{ac}{m}) \sum_{\substack{k\le \frac{mx}{q}\\P(k)\le y}} \frac{1}{\phi(m)} \sum_{\chi \bmod m} \overline{\chi}(c)\chi(k)$$

$$E(x,y;\theta) = \sum_{m|q} \frac{1}{\phi(m)} \sum_{\chi \bmod m} \Big(\sum_{\substack{c=1\\(c,m)=1}}^{m} \overline{\chi}(c)e(\frac{ac}{m})\Big) \sum_{\substack{k\le \frac{mx}{q}\\P(k)\le y}} \chi(k)$$

$$E(x,y;\theta) = \sum_{m|q} \frac{1}{\phi(m)} \sum_{\chi \bmod m} \tau(\overline{\chi})\chi(a) \sum_{\substack{k\le \frac{mx}{q}\\P(k)\le y}} \chi(k) \tag{3}$$

Posons maintenant $S(y,\theta) = \sum\limits_{\substack{n=1\\P(n)\le y}}^{+\infty} \frac{e(n\theta)}{n}$. Une sommation par parties donne:

$$\sum_{\substack{y<n\le N\\P(n)\le y}} \frac{e(n\theta)}{n} = \frac{1}{N} \sum_{\substack{n\le N\\P(n)\le y}} e(n\theta) - \frac{1}{y} \sum_{\substack{n\le y\\P(n)\le y}} e(n\theta) + \int_y^N \frac{dx}{x^2} \sum_{\substack{n\le x\\P(n)\le y}} e(n\theta)$$

c'est-à-dire:

$$\sum_{\substack{n\le N\\P(n)\le y}} \frac{e(n\theta)}{n} = \sum_{\substack{n\le y\\P(n)\le y}} \frac{e(n\theta)}{n} + \frac{1}{N}E(N,y;\theta) - \frac{1}{y}E(y,y;\theta) + \int_y^N \frac{dx}{x^2}E(x,y;\theta)$$

Comme $|E(x,y;\theta)| \le \psi(x,y) \ll x\exp(-\frac{\log x}{2\log y})$, l'intégrale $\int\limits_y^{+\infty} \frac{dx}{x^2}E(x,y;\theta)$ est absolument convergente. On en déduit la convergence de la série $S(y,\theta)$ et l'identité:

$$S(y,\theta) = \sum_{n\le y} \frac{e(n\theta)}{n} - \frac{1}{y}E(y,y;\theta) + \int_y^{+\infty} \frac{dx}{x^2}E(x,y;\theta) \tag{4}$$

Posons $g(n) = \begin{cases} \chi(\frac{nm}{q}) & \text{si } \frac{q}{m}|n \text{ et } P(\frac{nm}{q}) \le y \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$. Une nouvelle sommation par parties donne:

$$\sum_{\substack{y<\frac{qk}{m}\le N\\P(k)\le y}} \frac{\chi(k)}{k} = \frac{q}{m} \sum_{y<n\le N} \frac{g(n)}{n}$$

$$= \frac{q}{mN}\sum_{n\le N} g(n) - \frac{q}{my}\sum_{n\le y} g(n) + \frac{q}{m}\int_y^N \frac{dx}{x^2}\sum_{n\le x} g(n)$$

$$= \frac{q}{mN}\sum_{\substack{k\le \frac{mN}{q}\\ P(k)\le y}} \chi(k) - \frac{q}{my}\sum_{\substack{k\le \frac{my}{q}\\ P(k)\le y}} \chi(k) + \frac{q}{m}\int_y^N \frac{dx}{x^2}\sum_{\substack{k\le \frac{mx}{q}\\ P(k)\le y}} \chi(k)$$

La majoration $\Big|\sum_{\substack{k\le \frac{mx}{q}\\ P(k)\le y}} \chi(k)\Big| \le \psi(\frac{mx}{q},y)$ permet à nouveau de faire tendre N vers $+\infty$, d'où:

$$\int_y^{+\infty} \frac{dx}{x^2}\sum_{\substack{k\le \frac{mx}{q}\\ P(k)\le y}} \chi(k) = \frac{1}{y}\sum_{k\le \frac{my}{q}} \chi(k) + \frac{m}{q}\sum_{\substack{k> \frac{my}{q}\\ P(k)\le y}} \frac{\chi(k)}{k} \tag{5}$$

En regroupant (3), (4) et (5), on obtient finalement, en séparant les caractères principaux des autres:

$$S(y,\theta) = \sum_{n\le y}\frac{e(n\theta)}{n} - \frac{1}{y}E(y,y;\theta) + I(y) + J(y)$$

avec

$$I(y) = \sum_{m|q}\frac{\mu(m)}{\phi(m)}\Big(\frac{1}{y}\sum_{\substack{k\le \frac{my}{q}\\ (k,m)=1}} 1 + \frac{m}{q}\sum_{\substack{k> \frac{my}{q}\\ (k,m)=1\\ P(k)\le y}} \frac{1}{k}\Big)$$

et

$$J(y) = \sum_{m|q}\frac{1}{\phi(m)}\sum_{\substack{\chi \bmod m\\ \chi\ne\chi_0}} \tau(\overline{\chi})\chi(a)\Big(\frac{1}{y}\sum_{\substack{k\le \frac{my}{q}\\ P(k)\le y}} \chi(k) + \frac{m}{q}\sum_{\substack{k> \frac{my}{q}\\ P(k)\le y}} \frac{\chi(k)}{k}\Big)$$

b) Contribution des caractères principaux

On peut écrire $I(y) = S_1 + S_2 - S_3$ avec

$$S_1 = \frac{1}{y}\sum_{m|q}\frac{\mu(m)}{\phi(m)}\sum_{\substack{k\le \frac{my}{q}\\ (k,m)=1}} 1$$

$$S_2 = \frac{1}{q}\sum_{m|q}\frac{m\mu(m)}{\phi(m)}\sum_{\substack{k=1\\ (k,m)=1\\ P(k)\le y}}^{+\infty} \frac{1}{k}$$

$$S_3 = \frac{1}{q}\sum_{m|q}\frac{m\mu(m)}{\phi(m)}\sum_{\substack{k\le \frac{my}{q}\\ (k,m)=1}} \frac{1}{k}$$

– On a tout d'abord:

$$S_1 = \frac{1}{y}\sum_{m|q}\frac{\mu(m)}{\phi(m)}\sum_{k\le\frac{my}{q}}\sum_{\substack{l|k\\ l|m}}\mu(l) = \frac{1}{y}\sum_{m|q}\frac{\mu(m)}{\phi(m)}\sum_{l|m}\mu(l)\lfloor\frac{my}{ql}\rfloor$$

$$S_1 = \frac{1}{q}\sum_{m|q}\frac{m\mu(m)}{\phi(m)}\sum_{l|m}\frac{\mu(l)}{l} - \frac{1}{y}\sum_{m|q}\frac{\mu(m)}{\phi(m)}\sum_{l|m}\mu(l)(\frac{my}{q} - \lfloor\frac{my}{q}\rfloor)$$

ce qui, compte tenu de $\sum\limits_{l|m}\frac{\mu(l)}{l} = \frac{\phi(m)}{m}$ et de $|\frac{my}{q} - \lfloor\frac{my}{q}\rfloor| \le 1$, donne pour $q > 1$:

$$S_1 \ll \frac{f(q)}{y}$$

où $f(q) = \sum\limits_{m|q}\frac{d(m)}{\phi(m)} = (\mathbf{1} * \frac{d}{\phi})(q)$.

– Ensuite, on peut écrire:

$$S_2 = \frac{1}{q}\sum_{m|q}\frac{m\mu(m)}{\phi(m)}\prod_{\substack{p\nmid m\\ p\le y}}\left(1-\frac{1}{p}\right)^{-1} = \frac{1}{q}\sum_{m|q}\frac{m\mu(m)}{\phi(m)}\prod_{p\le y}\left(1-\frac{1}{p}\right)^{-1}\prod_{\substack{p\le y\\ p|m}}\left(1-\frac{1}{p}\right)$$

On peut supposer $y \ge q$, ce qui donne $\prod\limits_{\substack{p\le y\\ p|m}}(1-\frac{1}{p}) = \prod\limits_{p|m}(1-\frac{1}{p}) = \frac{\phi(m)}{m}$ et, pour $q > 1$:

$$S_2 = 0$$

– La dernière somme à estimer est:

$$S_3 = \frac{1}{q}\sum_{m|q}\frac{m\mu(m)}{\phi(m)}\sum_{\substack{k\le\frac{my}{q}\\ (k,m)=1}}\frac{1}{k} = \frac{1}{q}\sum_{m|q}\frac{m\mu(m)}{\phi(m)}\sum_{k\le\frac{my}{q}}\frac{1}{k}\sum_{\substack{l|k\\ l|m}}\mu(l)$$

$$= \frac{1}{q}\sum_{m|q}\frac{m\mu(m)}{\phi(m)}\sum_{l|m}\mu(l)\sum_{\substack{k\le\frac{my}{q}\\ l|k}}\frac{1}{k}$$

d'où, en posant $k = ls$:

$$S_3 = \frac{1}{q}\sum_{m|q}\frac{m\mu(m)}{\phi(m)}\sum_{l|m}\frac{\mu(l)}{l}\sum_{s\le\lfloor\frac{my}{ql}\rfloor}\frac{1}{s} = T_1 + T_2$$

avec

$$T_1 = \frac{1}{q}\sum_{m|q}\frac{m\mu(m)}{\phi(m)}\sum_{l|m}\frac{\mu(l)}{l}\log\frac{my}{ql}$$

$$T_2 = \frac{1}{q}\sum_{m|q}\frac{m\mu(m)}{\phi(m)}\sum_{l|m}\frac{\mu(l)}{l}\Big(\sum_{s\leq\lfloor\frac{my}{ql}\rfloor}\frac{1}{s} - \log\frac{my}{ql}\Big)$$

Dès que $q > 1$, on a:

$$T_1 = \frac{1}{q}\sum_{m|q}\frac{m\mu(m)}{\phi(m)}\sum_{l|m}\frac{\mu(l)}{l}\log\frac{m}{l} + \frac{1}{l}\Big(\log\frac{y}{q}\Big)\underbrace{\sum_{m|q}\frac{m\mu(m)}{\phi(m)}\sum_{l|m}\frac{\mu(l)}{l}}_{=0}$$

Dans la somme, on peut se limiter aux $m|\tilde{q}$, où $\tilde{q} = \prod\limits_{p|q} p$ (sinon $\mu(m) = 0$). Donc:

$$T_1 = \frac{1}{q}\sum_{m|\tilde{q}}\frac{m\mu(m)}{\phi(m)}\sum_{l|m}\frac{\mu(l)}{l}\log\frac{m}{l} = \frac{1}{q}\sum_{m|\tilde{q}}\frac{m\mu(m)}{\phi(m)}\sum_{p|m}\log p\sum_{\substack{l|m\\ p|\frac{m}{l}}}\frac{\mu(l)}{l}$$

$$T_1 = \frac{1}{q}\sum_{m|\tilde{q}}\frac{m\mu(m)}{\phi(m)}\sum_{p|m}\log p\sum_{\substack{l|m\\ p\nmid l}}\frac{\mu(l)}{l}$$

Or $\frac{\phi(m)}{m} = \sum\limits_{l|m}\frac{\mu(l)}{l} = \sum\limits_{\substack{l|m\\ p\nmid l}}\frac{\mu(l)}{l} + \sum\limits_{\substack{l|m\\ p\nmid l}}\frac{\mu(pl)}{pl} = (1-\frac{1}{p})\sum\limits_{\substack{l|m\\ p\nmid l}}\frac{\mu(l)}{l}$, soit $\sum\limits_{\substack{l|m\\ p\nmid l}}\frac{\mu(l)}{l} = \frac{p\phi(m)}{(p-1)m}$, donc

$$T_1 = \frac{1}{q}\sum_{m|\tilde{q}}\mu(m)\sum_{p|m}\frac{p\log p}{p-1} = \frac{1}{q}\sum_{p|\tilde{q}}\frac{p\log p}{p-1}\sum_{\substack{m|\tilde{q}\\ p|m}}\mu(m)$$

$$T_1 = \frac{1}{q}\sum_{p|\tilde{q}}\frac{p\log p}{p-1}\Big(\sum_{m|\tilde{q}}\mu(m) - \sum_{p|m}\mu(m)\Big) = -\frac{1}{q}\sum_{p|\tilde{q}}\frac{p\log p}{p-1}\delta(\frac{\tilde{q}}{p})$$

Comme $\delta(\frac{\tilde{q}}{p})$ est non nul si et seulement si q est une puissance de p, on trouve:

$$T_1 = -\frac{\Lambda(q)}{\phi(q)}$$

Reste à estimer T_2. On utilise l'estimation $\sum\limits_{s\leq u}\frac{1}{s} = \log u + \gamma + \mathcal{O}(\frac{1}{u})$ ce qui donne:

$$\sum_{s\leq\lfloor\frac{my}{ql}\rfloor}\frac{1}{s} - \log\frac{my}{ql} = \log\lfloor\frac{my}{ql}\rfloor - \log\frac{my}{ql} + \gamma + \mathcal{O}(\frac{ql}{my}) = \gamma + \mathcal{O}(\frac{ql}{my})$$

car d'après le théorème des accroissements finis, on a
$|\log\lfloor\frac{my}{ql}\rfloor - \log\frac{my}{ql}| = \frac{\frac{my}{ql} - \lfloor\frac{my}{ql}\rfloor}{\theta}$ avec $\theta \in]\lfloor\frac{my}{ql}\rfloor, \frac{my}{ql}[$.

On obtient ainsi, pour $q > 1$:

$$T_2 = \frac{1}{q}\sum_{m|q}\frac{m\mu(m)}{\phi(m)}\sum_{l|m}\frac{\mu(l)}{l}\Big(\gamma + \mathcal{O}(\frac{ql}{my})\Big) = \mathcal{O}(\frac{f(q)}{y}).$$

Finalement

$$I(y) = \frac{\Lambda(q)}{\phi(q)} + \mathcal{O}(\frac{f(q)}{y})$$

c) Contribution des caractères non principaux

On peut écrire $J(y) = J_1(y) + J_2(y)$, avec:

$$J_1(y) = \frac{1}{y}\sum_{m|q}\frac{1}{\phi(m)}\sum_{\substack{\chi \bmod m\\ \chi\neq\chi_0}}\tau(\overline{\chi})\chi(a)\sum_{k\leq\frac{my}{q}}\chi(k)$$

$$J_2(y) = \frac{1}{q}\sum_{m|q}\frac{m}{\phi(m)}\sum_{\substack{\chi \bmod m\\ \chi\neq\chi_0}}\tau(\overline{\chi})\chi(a)\sum_{\substack{k>\frac{my}{q}\\ P(k)\leq y}}\frac{\chi(k)}{k}$$

– Pour tout caractère non principal modulo m, la somme $\sum_{k\leq u}\chi(k)$ est bornée par $\sqrt{m}\log m$, d'après l'inégalité de Polya-Vinogradov. De plus $|\tau(\overline{\chi})| \leq \sqrt{m}$. Donc:

$$J_1(y) \ll \frac{1}{y}\sum_{m|q}\sqrt{m}\sqrt{m}\log m \ll \frac{\sigma(q)}{y}\log q$$

où $\sigma(q) = \sum_{m|q} m$.

– Pour majorer $J_2(y)$, il suffit d'estimer

$$\sum_{\substack{k>\frac{my}{q}\\ P(k)\leq y}}\frac{\chi(k)}{k} = \underbrace{\Big(L(1,\chi) - \sum_{k\leq\frac{my}{q}}\frac{\chi(k)}{k}\Big)}_{U_1(y)} - \underbrace{\Big(L(1,\chi) - \prod_{p\leq y}(1-\frac{\chi(p)}{p})^{-1}\Big)}_{U_2(y)}$$

Une sommation par parties donne immédiatement (χ étant non principal):

$$U_1(y) = \sum_{k>\frac{my}{q}}\frac{\chi(k)}{k} = -\frac{q}{my}\sum_{k\leq\frac{my}{q}}\chi(k) + \frac{q}{m}\int_y^{+\infty}\frac{dx}{x^2}\sum_{k\leq\frac{my}{q}}\chi(k)$$

ce qui, en utilisant à nouveau l'inégalité de Polya-Vinogradov, donne:

$$U_1(y) \ll \frac{q}{\sqrt{my}}\log m.$$

Pour étudier $U_2(y)$, on remarque que:

$$\log \prod_{p\leq y} \Big(1-\frac{\chi(p)}{p}\Big)^{-1} - \log L(1,\chi) = \sum_{p>y} \log(1-\frac{\chi(p)}{p})$$

$$= -\sum_{p>y} \frac{\chi(p)}{p} + \sum_{p>y} \Big(\log(1-\frac{\chi(p)}{p}) + \frac{\chi(p)}{p}\Big)$$

La deuxième somme donne une contribution en $\mathcal{O}(\frac{1}{y})$.
Pour la première somme, on va démontrer le résultat suivant:

Lemme 6. *Pour χ caractère non principal modulo m, on a:*

$$\sum_{p>y} \frac{\chi(p)}{p} \ll \frac{1}{\log y}\Big(\frac{\sqrt{m}\log m}{|L(1,\chi)|}+1\Big).$$

Démonstration : Une sommation par parties donne:

$$\sum_{p>y} \frac{\chi(p)}{p} = -\frac{1}{\log y} \sum_{p\leq y} \frac{\chi(p)\log p}{p} + \int_y^{+\infty} \frac{du}{u(\log u)^2} \sum_{p\leq u} \frac{\chi(p)\log p}{p}$$

Or on a

$$\sum_{n\leq y} \frac{\chi(n)\log n}{n} = \sum_{k\leq y} \frac{\chi(k)\Lambda(k)}{k} \sum_{l\leq \frac{y}{k}} \frac{\chi(l)}{l}$$

$$= \sum_{k\leq y} \frac{\chi(k)\Lambda(k)}{k} \Big(L(1,\chi) + \mathcal{O}(\frac{k\sqrt{m}\log m}{y})\Big)$$

$$= L(1,\chi)\Big(\sum_{p\leq y} \frac{\chi(p)\log p}{p} + \sum_{p\leq y} \log p \sum_{\alpha=2}^{+\infty} \frac{1}{p^\alpha}\Big) + \mathcal{O}(\frac{\psi(y)}{y}\sqrt{m}\log m)$$

ce qui donne, en tenant compte de $\psi(y) \ll y$ et de $L(1,\chi) \neq 0$:

$$\sum_{p\leq y} \frac{\chi(p)\log p}{p} = \frac{1}{L(1,\chi)}\Big(\sum_{n\leq y} \frac{\chi(n)\log n}{n} + \mathcal{O}(\sqrt{m}\log m)\Big) + \mathcal{O}(1).$$

Or, toujours d'après l'inégalité de Polya-Vinogradov, on a:

$$\sum_{n\leq y} \frac{\chi(n)\log n}{n} \ll \sqrt{m}\log m.$$

Le lemme est donc démontré.

– En utilisant le lemme, on obtient:

$$U_2(y) = L(1,\chi)\Big(1 - \exp\big(\log\prod_{p\le y}\Big(1-\frac{\chi(p)}{p}\Big)^{-1} - \log L(1,\chi)\big)\Big)$$

$$U_2(y) = L(1,\chi)\left(1-\exp\left(\mathcal{O}\Big(\frac{1}{\log y}\big(\frac{\sqrt{m}}{|L(1,\chi)|}+1\big)\Big)\right)\right).$$

Si on suppose $\sqrt{m}\log m \ll |L(1,\chi)|\log y$, cela donne:

$$U_2(y) \ll |L(1,\chi)|\frac{1}{\log y}\Big(\frac{\sqrt{m}}{|L(1,\chi)|}+1\Big) \ll \frac{1}{\log y}(\sqrt{m}\log m + |L(1,\chi)|).$$

Or, l'inégalité de Polya-Vinogradov montre que $|L(1,\chi)| \ll \sqrt{m}\log m$. Donc:

$$U_2(y) \ll \frac{\sqrt{m}\log m}{\log y}.$$

En regroupant tous les résultats de ce paragraphe, on obtient finalement:

$$J(y) \ll \frac{\sigma(q)\log q}{y} + \frac{\sigma_2(q)\log q}{q\log y} \ll \frac{q\log q}{\log y}$$

à condition de supposer que:

$$\forall m|q,\ \ \forall\chi \bmod m,\ \ \sqrt{m}\log m \ll |L(1,\chi)|\log y \tag{6}$$

d) Conclusion

$$S(y,\theta) = \sum_{n\le y}\frac{e(n\theta)}{n} - \frac{1}{y}E(y,y;\theta) + I(y) + J(y)$$

avec $I(y) = \frac{\Lambda(q)}{\phi(q)} + \mathcal{O}(\frac{f(q)}{y})$ et $J(y) = \mathcal{O}(\frac{q\log q}{\log y})$. De plus:

$$\sum_{n\le y}\frac{e(n\theta)}{n} - \log\Big(\frac{1}{1-e(\theta)}\Big) = -\sum_{n>y}\frac{e(n\theta)}{n}$$

$$= -\frac{1}{y}\sum_{n\le y}e(n\theta) - \int_y^{+\infty}\frac{dx}{x^2}\sum_{n\le x}e(n\theta) = \mathcal{O}(\frac{q}{y})$$

et, de même:

$$\frac{1}{y}E(y,y;\theta) = \frac{1}{y}\sum_{n\le y}e(n\theta) = \mathcal{O}(\frac{q}{y}).$$

On trouve finalement, sous les conditions (6):

$$S(y,\theta) = \log\Big(\frac{1}{1-e(\theta)}\Big) + \frac{\Lambda(q)}{\phi(q)} + \mathcal{O}(\frac{q\log q}{\log y}).$$

Reste à vérifier que les hypothèses du théorème 4 impliquent bien les conditions (6).
On suppose $q^{\frac{1}{2}+\varepsilon}\log q \leq K\log y$ (avec $K>0$ et $\varepsilon>0$). Soit $q>1$, $m|q$, χ mod m, $\chi\neq\chi_0$.
D'après la minoration (non effective) de $L(1,\chi)$ due à Siegel, on a:

$$|L(1,\chi)| \geq C(\varepsilon)m^{-\varepsilon} \geq C(\varepsilon)q^{-\varepsilon} \geq \frac{C(\varepsilon)}{K}\frac{\sqrt{q}\log q}{\log y} \geq \frac{C(\varepsilon)}{K}\frac{\sqrt{m}\log m}{\log y}.$$

Les conditions (6) sont donc vérifiées.

5. Le cas $f=\mu$

Si on pose $E_\mu(x,y;\theta) = \sum_{\substack{n\leq x\\ P(n)\leq y}} \mu(n)e(n\theta)$, on trouve comme précédemment:

$$E_\mu(x,y;\theta) = \sum_{b=1}^{q} e(\frac{ab}{q}) \sum_{\substack{k\leq\frac{x}{(b,q)}\\ P(k)\leq y\\ k\equiv\frac{b}{(b,q)} \bmod \frac{q}{(b,q)}}} \mu(k(b,q))$$

pour $y\leq q$. Comme μ ne charge que les nombres sans facteur carré, cela donne:

$$E_\mu(x,y;\theta) = \sum_{b=1}^{q} e(\frac{ab}{q})\mu((b,q)) \sum_{\substack{k\leq\frac{x}{(b,q)}\\ P(k)\leq y\\ k\equiv\frac{b}{(b,q)} \bmod \frac{q}{(b,q)}\\ (k,(b,q))=1}} \mu(k)$$

En posant $m=\frac{q}{(b,q)}$ et $c=\frac{b}{(b,q)}$, on obtient:

$$E_\mu(x,y;\theta) = \sum_{m|q}\sum_{\substack{c=1\\ (c,m)=1}}^{m} e(\frac{ac}{m})\mu(\frac{q}{m}) \sum_{\substack{k\leq\frac{mx}{q}\\ P(k)\leq y\\ k\equiv c \bmod m\\ (k,\frac{q}{m})=1}} \mu(k)$$

soit, en utilisant l'orthogonalité des caractères:

$$E_\mu(x,y;\theta) = \sum_{m|q}\mu(\frac{q}{m}) \sum_{\substack{c=1\\ (c,m)=1}}^{m} e(\frac{ac}{m}) \sum_{\substack{k\leq\frac{mx}{q}\\ P(k)\leq y\\ (k,\frac{q}{m})=1}} \frac{1}{\phi(m)} \sum_{\chi \bmod m} \overline{\chi}(c)\chi(k)\mu(k)$$

ce qui s'écrit, en notant χ_k le caractère principal modulo k:

$$E_\mu(x,y;\theta) = \sum_{m|q} \frac{1}{\phi(m)} \mu(\frac{q}{m}) \sum_{\substack{c=1 \\ (c,m)=1}}^{m} e(\frac{ac}{m}) \sum_{\chi \bmod m} \overline{\chi}(c) \sum_{\substack{k \leq \frac{mx}{q} \\ P(k) \leq y}} (\chi \chi_{\frac{q}{m}} \mu)(k)$$

On en déduit, comme dans le cas $f = \mathbf{1}$:

$$\sum_{\substack{n=1 \\ P(n) \leq y}}^{+\infty} \frac{e(n\theta)}{n} \mu(n) = \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2} E_\mu(x,y;\theta)$$

$$= \frac{1}{q} \sum_{m|q} \frac{m}{\phi(m)} \mu(\frac{q}{m}) \sum_{\chi \bmod m} \tau(\overline{\chi}) \chi(a) \sum_{\substack{k=1 \\ P(k) \leq y}}^{+\infty} \frac{(\chi \chi_{\frac{q}{m}} \mu)(k)}{k}$$

Le même calcul, sans la condition $P(n) \leq y$, donne:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{e(n\theta)}{n} \mu(n) = \frac{1}{q} \sum_{m|q} \frac{m}{\phi(m)} \mu(\frac{q}{m}) \sum_{\chi \bmod m} \tau(\overline{\chi}) \chi(a) \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(\chi \chi_{\frac{q}{m}} \mu)(k)}{k}$$

avec, pour tout caractère χ:

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(\chi\mu)(k)}{k} = \frac{1}{L(1,\chi)} \qquad (= 0 \text{ par convention si } \chi \text{ est principal})$$

– Si χ n'est pas principal, on a:

$$\log \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(\chi\mu)(k)}{k} - \log \sum_{\substack{k=1 \\ P(k) \leq y}}^{+\infty} \frac{(\chi\mu)(k)}{k} = \log \prod_p \Big(1 - \frac{\chi(p)}{p}\Big) - \log \prod_{p \leq y} \Big(1 - \frac{\chi(p)}{p}\Big)$$

$$= \sum_{p > y} \log \Big(1 - \frac{\chi(p)}{p}\Big) = - \sum_{p > y} \frac{\chi(p)}{p} + \mathcal{O}(\frac{1}{y})$$

d'où, en utilisant le lemme 6 comme dans le cas de $f = \mathbf{1}$:

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(\chi\mu)(k)}{k} - \sum_{\substack{k=1 \\ P(k) \leq y}}^{+\infty} \frac{(\chi\mu)(k)}{k} = \mathcal{O}(\frac{q \log q}{\log y})$$

à condition de supposer (6).

– Si χ modulo m est principal, la formule de Mertens donne immédiatement:

$$\sum_{\substack{k=1 \\ P(k) \leq y}}^{+\infty} \frac{(\chi\mu)(k)}{k} = \prod_{p \leq y} \Big(1 - \frac{\chi(p)}{p}\Big) = \prod_{p|m} \Big(1 - \frac{1}{p}\Big)^{-1} \prod_{p \leq y} \Big(1 - \frac{1}{p}\Big) = \mathcal{O}(\frac{\log q}{\log y})$$

Sous les hypothèses du théorème 5, les conditions (6) sont à nouveau vérifiées et on déduit de ce qui précède:

$$\sum_{\substack{n=1\\P(n)\leq y}}^{+\infty} \frac{e(n\theta)}{n}\mu(n) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{e(n\theta)}{n}\mu(n) + \mathcal{O}(\frac{q\log q}{\log y})$$

ou bien, en utilisant une dernière fois l'orthogonalité des caractères:

$$\sum_{\substack{n=1\\P(n)\leq y}}^{+\infty} \frac{e(n\theta)}{n}\mu(n) = \frac{1}{\phi(q)}\sum_{b=1}^{q} e(\frac{ab}{q}) \sum_{\chi \bmod q} \frac{\overline{\chi}(b)}{L(1,\chi)} + \mathcal{O}(\frac{q\log q}{\log y})$$

Références

[1] H. Daboussi & H. Delange, *Quelques propriétés des fonctions multiplicatives de module au plus égal à 1*, C.R. Acad. Sci. Paris, Sér. A, **278** (1974), 657-660.

[2] H. Delange, *Sur les fonctions arithmétiques multiplicatives de module* ≤ 1, Acta arithmetica, **42** (1983), 121-151.

[3] E. Fouvry & G. Tenenbaum, *Entiers sans grand facteur premier en progressions arithmétiques*, Proc. London Math. Soc., (3) **63** (1991), 449-494.

[4] G. Halász, *Über die Mittelwerte multiplikativer zahlentheorischer Funktionen*, Acta Math. Acad. Sci. Hung., **19** (1968), 365-403.

[5] H. Halberstam & H. E. Richert, *Sieve methods*, Academic Press, London, New-York, San Francisco (1974).

[6] J.L. Mauclaire, *Intégration et théorie des nombres*, Hermann, Paris (1986).

[7] H.L. Montgomery & R.C. Vaughan, *On exponential sums with multiplicative coefficients*, Inventiones Math., **43** (1977), 69-82.

[8] G. Tenenbaum, Lettre à H. Daboussi.

[9] G. Tenenbaum, *Introduction à la théorie analytique et probabiliste des nombres*, Publications de l'Institut Élie Cartan, Nancy (1990).

Louis GOUBIN
École Normale Supérieure
45, rue d'Ulm
75005 Paris