A propos de l'existence d'un équilibre avec des ensembles de production non convexes

F.X. Dehon & L. Goubin

24 septembre 1992

1. Introduction

Nous nous intéressons ici à un modèle d'économie comportant un nombre fixé de consommateurs et de producteurs, et dans lequel les plans de production ne constituent pas nécessairement des ensembles convexes, ce qui inclue en particulier le cas de rendements d'échelle croissants.

Chaque ensemble de production est supposé fermé, non vide et vérifiant la libre disposition. De plus, pour simplifier la partie technique, on fait l'hypothèse que les ensembles de production sont *lisses*, ce dont on peut vraisemblablement se passer, soit en utilisant un procédé d'approximation, soit en considérant le cône normal de Clarke au lieu de la normale en un point du bord.

Les consommateurs sont décrits par une relation de préordre total représentant leurs préférences parmi les paniers de biens à leur disposition, et par une fonction exprimant leur revenu en fonction des prix et du profit de chaque producteur. On fait en outre les hypothèses classiques de Debreu (1959) sur les ensembles de consommation et sur le préordre total, et on suppose que "la richesse totale est distribuée de telle manière que chaque consommateur reste au-dessus de son niveau de subsistance à condition que la société puisse supporter cette politique". C'est le cas par exemple pour une économie de propriété privée.

La dotation initiale agrégée des consommateurs étant fixée, on cherche à établir l'existence d'un *équilibre avec tarification marginale*, c'est-à-dire d'une liste de plans de consommation, de plans de production et de prix positifs ou nuls, tels que chaque consommateur optimise ses préférences sous la contrainte de budget, et chaque producteur suive la loi de tarification au *coût marginal*, ce qui signifie qu'il remplit la condition nécessaire du premier ordre pour la maximisation du profit. Dans le cas où l'ensemble de production est convexe, on retrouve bien le fait que le producteur maximise son profit. Enfin on impose que l'excès de demande soit négatif ou nul et orthogonal au vecteur des prix.

En 1985, Bonnisseau et Cornet ([2]) ont prouvé l'existence d'un équilibre avec tarification marginale, lorsqu'on suppose de plus que pour toute dotation $\overline{\omega}$ supérieure à la dotation initiale ω, l'ensemble $A(\overline{\omega})$ des allocations admissibles efficaces est borné, et vérifie l'hypothèse de survivance faible. Cette dernière traduit le fait que, pour toute allocation dans $A(\overline{\omega})$ et pour tout prix vérifiant la loi de tarification marginale, la richesse totale de l'économie est strictement positive. Cette hypothèse, plus faible que l'hypothèse de survivance classique, permet de traiter l'exemple de Beato et Mas-Colell (1985). Par ailleurs Kamiya, en 1988, a donné un contre-exemple montrant qu'on ne peut se contenter de la seule hypothèse de survivance faible pour la seule dotation initiale.

Dans la démonstration de Bonnisseau et Cornet, le principe est d'appliquer un théorème de point fixe, comme celui de Kakutani, à la correspondance d'excès de demande, convenablement modifiée, après avoir montré - grâce à la théorie de Morse - que $A(\omega)$ est un rétract de boule. En fait Cornet ([3]) a montré que sous les hypothèses précédentes, $A(\omega)$ est *homéomorphe* à une boule.

Ici, nous affaiblissons cet ensemble d'hypothèses en supposant d'une part que $A(\omega)$ est borné et de caractéristique d'Euler-Poincaré non nulle, et d'autre part que l'hypothèse de survivance faible est vraie pour ω. Nous montrons que dans ces conditions il existe un équilibre avec tarification marginale. Ce résultat contient en particulier celui de Bonnisseau et Cornet puisqu'un rétract de boule a bien une caractéristique d'Euler-Poincaré non nulle. Pour démontrer le théorème, nous employons une variante du théorème de Poincaré-Hopf, qui repose sur un théorème d'annulation de correspondance. Afin de pouvoir disposer de l'outil pratique du calcul différentiel sur les variétés, nous approchons $A(\omega)$ par une variété lisse, la difficulté étant de montrer que les hypothèses faites sur $A(\omega)$ s'étendent à cette variété.

2. Description du modèle

On considère une économie $\mathcal{E} = ((X_i, \preceq_i, r_i)_{1 \ i \ m}\ , (Y_j)_{1 \ j \ n}\ , \omega)$ sous les hypothèses suivantes [1]:

(P) Pour tout j, Y_j est un fermé non vide de $\mathbb{R}^l$ à bord C[2][2] et vérifiant la libre disposition ($Y_j - \mathbb{R}^l_+ \subset Y_j$).

(C) Pour tout i, X_i est un convexe fermé de $\mathbb{R}^l_+$ contenant 0, $\preceq_i$ est continue convexe et vérifie la non-satiété locale [3].

(B') L'ensemble $A(\omega) = \{y = (y_j) \in \prod \partial Y_j \mid \sum y_j + \omega \ 0\}$ est borné de caractéristique d'Euler-Poincaré non nulle.

(WSA') $\forall y \in A(\omega)$, $\forall p \in \cap N_{Y_j}(y_j) \setminus \{0\}$, $p \cdot (\sum y_j + \omega) > 0$.

(R) Pour tout i, $r_i : \mathbb{R}^l_+ \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ est continue homogène de degré 1 et $\sum r_i(p, (\pi_j)) = p \cdot \omega + \sum \pi_j$ (où $\pi_j := p \cdot y_j$), et on a:
$\forall y \in A(\omega)$, $\forall p \in \cap N_{Y_j}(y_j) \setminus \{0\}$, $\forall i$, $r_i(p, (\pi_j)) > 0$.

Définition: Un équilibre de $\mathcal{E}$ est une allocation $((x_i^*), (y_j^*), p^*)$ dans $\mathbb{R}^{lm} \times \mathbb{R}^{ln} \times \mathbb{R}^l$ vérifiant:

a) Pour tout i, x_i^* est un élément maximal pour $\preceq_i$ de $\{x \in X_i \mid p^* \cdot x \ \ r_i(p^*, (\pi_j^*))\}$.

b) $\forall j$, $y_j^* \in \partial Y_j$ et $p^* \in N_{Y_j}(y_j^*)$ (condition du 1$^{\text{er}}$ ordre pour la maximisation du profit).

c) $\sum x_i^* \ \ \sum y_j^* + \omega$, $p^* \ 0$ et $p^* \cdot (\sum x_i^* - \sum y_j^* - \omega) = 0$.

Théorème 1. *Sous les hypothèses (P), (C), (B'), (R) et (WSA'), $\mathcal{E}$ admet un équilibre.*

Comme dans [2], il suffit de montrer le résultat sous l'hypothèse plus forte suivante:

(SR) Pour tout i, $r_i : \mathbb{R}^l_+ \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ est continue homogène de degré 1 et $\sum r_i(p, (\pi_j)) = p \cdot \omega + \sum \pi_j$, et on a:
$\forall (p, y) \in \mathbb{R}^l_+ \times \prod \partial Y_j$, $[p \neq 0$ et $p \cdot (\sum y_j + \omega) > 0$ (resp $= 0, < 0)] \Rightarrow [\forall i, r_i(p, (\pi_j)) > 0$ (resp $= 0, < 0)]$.

Si on remplace (B') et (WSA') par les hypothèses suivantes:

(B) $\forall \overline{\omega} \ \ \omega$, $A(\overline{\omega})$ est borné.

[1]Rappelons les notations usuelles: $\cdot.\cdot$ désigne le produit scalaire canonique de $\mathbb{R}^l$, $\ $ l'ordre produit sur $\mathbb{R}^l$, $\mathbb{R}^l_+$ les éléments de $\mathbb{R}^l$ plus grands que 0 pour cet ordre, $\mathbb{R}^l_{++}$ les éléments de $\mathbb{R}^l$ à coordonnées strictement positives, $[x]_+$ l'élément dont la i-ème coordonnée est $max(0, x_i)$, $[x]_-$ l'élément $x - [x]_+$, ∂W le bord (ou frontière) de W, S la sphère unité de $\mathbb{R}^l$, S_+ l'intersection de S avec $\mathbb{R}^l_+$, $B(\mathbb{R}^l_+, \varepsilon)$ la réunion des boules fermées de rayon ε centrées dans $\mathbb{R}^l_+$, e le vecteur de $\mathbb{R}^l$ dont les coordonnées valent toutes 1. Si V est une sous-variété de $\mathbb{R}^k$, on note $T_V(x)$ l'espace tangent à V au point x, et $N_V(x)$ l'orthogonal de $T_V(x)$ dans $\mathbb{R}^k$.

[2]c'est à dire qu'on a $Y_j = \{y \in \mathbb{R}^l \mid g_j(y) \ 0\}$, où g_j est une fonction de classe C^2 de $\mathbb{R}^l$ dans $\mathbb{R}$, avec $\nabla g_j(y) \neq 0$ dès que $g_j(y) = 0$.

[3]Un ensemble X vérifie la non-satiété locale si aucun de ses éléments n'est maximal pour la relation de préférence d'un consommateur. Plus généralement, X vérifie la non satitété locale relativement à X' si aucun des éléments de X n'est maximal dans X' pour la relation de préférence d'un consommateur.

(WSA) $\forall \overline{\omega}\ \ \omega, \forall (p,y) \in \mathbb{R}^l_+ \times \prod \partial Y_j,\ [\sum y_j + \overline{\omega}\ \ 0$ et $p \in \cap N_{Y_j}(y_j) \setminus \{0\}] \Rightarrow [p \cdot (\sum y_j + \overline{\omega}) > 0]$

$A(\omega)$ est alors homéomorphe à la boule fermée $B^{(l-1)n}$ ([3]), ce qui donne en particulier une caractéristique d'Euler-Poincaré non nulle. On retrouve ainsi le résultat de Bonnisseau et Cornet ([2]):

Théorème 2. *Sous les hypothèses (P), (C), (R), (B) et (WSA), $\mathcal{E}$ admet un équilibre.*

3. Preuve

On part du résultat suivant:

Théorème 3. *Si V est une variété difféomorphe à un espace euclidien et W est une sous-variété compacte à bord ou à coins de V, de codimension 0 et de caractéristique d'Euler-Poincaré non nulle, alors toute correspondance h.c.s. à valeurs convexes compactes section du fibré tangent T_W de W (restriction à W de T_V) s'annule sur W ou sort (et rentre) de W strictement suivant une direction normale au bord de W dans V.*

Pour le voir, il suffit de tirer suffisamment la correspondance sur ∂W suivant la normale à ∂W dans V afin d'obtenir une correspondance rentrante, ce qui est toujours possible si W est compacte et la correspondance hcs, et d'appliquer un théorème d'annulation.

Cas d'une économie d'échange

Dans le cas d'une économie d'échange[4], un équilibre est obtenu comme allocation pour laquelle l'excès de demande est négatif ou nul et orthogonal au prix.

Soit $\widehat{\prod X_i} = \{x \in \prod X_i \mid \sum x_i\ \ \omega\}$ l'ensemble des allocations admissibles et $\hat{X}_i$ la projection de $\widehat{\prod X_i}$ sur X_i. On choisit $k \in \mathbb{R}$ tel que $\hat{X}_i$ soit inclus dans $\{ke\} - \mathbb{R}^l_{++}$ et on restreint l'ensemble de consommation à $X_i^k = X_i \cap (\{ke\} - \mathbb{R}^l_+)$ (compact non vide). Ainsi la non-satiété locale ayant lieu en tout point intérieur de X_i^k pour la topologie de X_i vaut sur $\hat{X}_i$ relativement à X_i^k.

On définit la correspondance de demande $f_i^k : S_+ \longrightarrow \mathbb{R}^l$ qui à un prix normalisé p associe l'ensemble des plus grands éléments de X_i^k sous la contrainte de budget. f_i^k est définie là où r_i est strictement positif ce qui est toujours le cas puisque ω est dans $\mathbb{R}^l_{++}$ par WSA' et $r_i(p)$ est strictement positif pour tout p par SR.

Soit F la correspondance d'excès de demande: $p \mapsto \sum f_i^k(p) - \omega$. F est hcs à valeurs convexes compactes non vides (cf [1]). Puisqu'on est sous la contrainte de budget, $p \cdot F(p)$ est inclus dans $\mathbb{R}_-$. Il suffit donc de rendre négative ou nulle la projection de F sur l'espace tangent de la sphère pour obtenir une allocation admissible. Dans ce cas la non-satiété locale nous garantit que les contraintes de budget sont saturées et donc que l'excès de demande est orthogonal à p. L'allocation est donc d'équilibre modulo le fait qu'on a optimisé sur X_i^k et non sur X_i. En fait, parce que $\hat{X}_i$ est intérieur à X_i^k, un optimum sous contrainte de budget de X_i^k est optimum sous contrainte de budget de X_i:

Soit X l'ensemble de consommation, $\tilde{X}$ l'ensemble de consommation sous contrainte de budget et $\tilde{X}^k$ l'ensemble de consommation restreint sous contrainte de budget ($\tilde{X}^k \subset \tilde{X} \subset X$),
$\preceq$ un préordre total continu et convexe et x^k un plus grand élément de $\tilde{X}^k$ intérieur à $\tilde{X}^k$ pour la topologie de $\tilde{X}$. On veut montrer que x^k est plus grand élément de $\tilde{X}$.

Supposons le contraire, il existe $x \in \tilde{X}$ majorant strictement x^k, d'où un sous-segment $[x^k, z]$ non réduit à un point où $\preceq$ est triviale. Soit w le milieu de $[x^k, z]$, on applique la non-satiété locale en w. Remarquons que les points d'un segment majorent la plus petite de ses extrémités et donc qu'un segment dont les extrémités majorent strictement les points de $[x^k, z]$ ne peut couper celui-ci. En particulier, les points suffisamment proches de w obtenus par la non-satiété locale sont d'un même coté

[4] On reprend les hypothèses (C), (WSA') et (SR) avec $n = 1$ et $Y_1 = \{0\}$.

du segment $[x^k, z]$ et par suite tous les points de $\tilde{X}$ majorant strictement x^k sont d'un même coté de la droite support de $[x^k, z]$. Il ne peuvent se trouver sur cette droite par continuité de $\preceq$, ce qui contredit l'existence de x.

Cas général

La correspondance d'excès de demande n'est plus à valeurs convexes si on n'impose pas la convexité des ensembles de production, d'où l'idée de considérer les y_j comme paramètres et d'étendre la notion d'équilibre (condition du 1^{er} ordre pour l'optimisation du profit).

Par hypothèse, $A(\omega)$ est non vide. Pour avoir une variété à bord, on substitue à $A(\omega)$ l'ensemble $A_\varepsilon = \{y \in V \mid \sum y_j + \omega \in B(\mathbb{R}^l_+, \varepsilon)\}$ où V est un voisinage ouvert borné de $A(\omega)$ dans $\prod \partial Y_j$ sur lequel (WSA') reste vraie et ε est choisi assez petit pour que A_ε soit fermé dans $\prod \partial Y_j$, de sorte que les conditions (B') et (WSA') s'étendent à A_ε (voir appendice). De fait A_ε est l'ensemble $\{y \in V \mid \theta(y) \ \ \varepsilon^2\}$ avec $\theta(y) = \|[\sum y_j + \omega]_-\|^2$. Sa différentielle $d\theta$ a pour expression $2[\sum y_j + \omega]_- \cdot \sum dy_j$ et ne peut être nulle si $\theta(y)$ vaut ε^2, sinon $[\sum y_j + \omega]_-$ est non nul et pour tout j, $[\sum y_j + \omega]_- \cdot dy_j$ est nulle sur $T_{\partial Y_j}(y_j)$, autrement dit $-[\sum y_j + \omega]_-$ est dans $\cap N_{Y_j}(y_j) \setminus \{0\}$ et $(-[\sum y_j + \omega]_-) \cdot (\sum y_j + \omega)$ est négatif ou nul, ce qui contredit WSA'.

On considère la correspondance:

$$\begin{array}{lll} S_+ \times A_\varepsilon & \to & T_{S \times \prod \partial Y_j} \\ (p, y) & \mapsto & proj_{T_{S}(p)} F_1(p, y) \times proj_{T_{\prod \partial Y_j}(y)}(p, \text{—}, p) \end{array}$$

où F_1 est la correspondance d'excès de demande obtenue en étendant la correspondance de demande par $\{0\}$ là où $r_i(p, y)$ est strictement négatif (ce qui se produit si ε est non nul) et par $\{x \in X_i^k \mid p \cdot x = 0\}$ là où r_i est nul (pour conserver le caractère hcs). Précisément:

$$\begin{array}{llll} F_1(p, y) & = & \sum f_i^k(p) - \sum y_j - \omega & \text{si } r_i(p, y) > 0 \\ & = & \sum \{x_i \in X_i^k \mid p \cdot x_i = 0\} - \sum y_j - \omega & \text{si } r_i(p, y) = 0 \\ & = & -\sum y_j - \omega & \text{si } r_i(p, y) < 0 \end{array}$$

D'après la remarque préliminaire, on obtient un (p, y) où $proj_{T_S(p)} F_1(p, y)$ et $proj_{T_{\prod \partial Y_j}(y)}(p, \text{—}, p)$ sont nuls ou sortants suivant un vecteur normal, ce qui entraîne en particulier que $F_1(p, y) \cap \mathbb{R}^l_-$ est non vide.

Si les r_i sont strictement positifs on obtient une allocation vérifiant les conditions d'équilibre (a) et (c). La condition (b) est alors vraie car y est intérieur à A_ε.

Si les r_i sont négatifs ou nuls (ils ont toujours même signe par SR), il en est de même de $p \cdot (\sum y_j + \omega) = \sum r_i$ ce qui interdit par WSA' l'annulation de $proj_{T_{\prod \partial Y_j}(y)}(p, \text{—}, p)$. Ce dernier est donc sortant (strictement) suivant une direction normale à ∂A_ε dans $\prod \partial Y_j$. Mais en évaluant avec $d\theta$:

$$\begin{array}{lll} \frac{1}{2} d\theta . proj_{T_{\prod \partial Y_j}(y)}(p, \text{—}, p) & = & [\sum y_j + \omega]_- \cdot \sum proj_{T_{\partial Y_j}(y_j)}(p) \\ & = & \sum proj_{T_{\partial Y_j}(y_j)}([\sum y_j + \omega]_-) \cdot proj_{T_{\partial Y_j}(y_j)}(p) \end{array}$$

Remarquons que $u \in \mathbb{R}^l$ s'écrit de façon unique comme somme orthogonale de $u_+ \in \mathbb{R}^l_+$ et $u_- \in \mathbb{R}^l_-$ (u_+ est la projection de u sur le convexe $\mathbb{R}^l_+$). De l'écriture:

$$\sum y_j + \omega = [\sum y_j + \omega]_+ + [\sum y_j + \omega]_- = proj_{T_S(p)}(\sum y_j + \omega) + (p \cdot (\sum y_j + \omega))p$$

on déduit que $[\sum y_j + \omega]_-$ est colinéaire à p donc $proj_{T_{\partial Y_j}(y_j)}([\sum y_j + \omega]_-) \cdot proj_{T_{\partial Y_j}(y_j)}(p)$ est du signe de $([\sum y_j + \omega]_-) \cdot p$ qui est négatif ou nul. C'est dire que $proj_{T_{\prod \partial Y_j}(y)}(p, \text{—}, p)$ est rentrant, contradiction.

Appendice

Nous donnons ici une preuve succincte de l'existence de ε:

La condition (WSA') reste vraie sur un voisinage de $A(\omega)$ dans $\prod \partial Y_j$ par compacité de $A(\omega)$, ce qui entraîne la non nullité de $d\theta$ sur ce voisinage en dehors de $A(\omega)$. On choisit un voisinage ouvert borné V de $A(\omega)$ dans $\prod \partial Y_j$ tel que (WSA') soit vraie dans l'adhérence de V. θ est strictement positive sur le bord de V donc est minorée par un ε^2 strictement positif. On définit alors $A_\varepsilon = \{y \in V \mid \theta(y) \ \ \varepsilon^2\}$, fermé de $\prod \partial Y_j$.
On considère sur $A_\varepsilon \setminus A(\omega)$ le flot $\phi_t(y)$ associé à l'équation:

$$y'(t) = \frac{proj_{T_{\prod \partial Y_j}(y(t))}([\sum y_j(t) + \omega]_-, \text{—}, [\sum y_j(t) + \omega]_-)}{\|proj_{T_{\prod \partial Y_j}(y(t))}([\sum y_j(t) + \omega]_-, \text{—}, [\sum y_j(t) + \omega]_-)\|}$$

avec $\phi_0(y) = y$ (ce sont les lignes de champ de θ). Pour y dans $A_\varepsilon \setminus A(\omega)$ et $t < 0$ assez proche de 0 on a:

$$\begin{array}{rcl} \theta(\phi_t(y)) - \theta(\phi_0(y)) & = & \int_0^t d\theta(\phi_t(y)) \cdot \phi_t(y)' dt \\ & = & \int_0^t \|d\theta(\phi_t(y))\| dt \\ & & \int_0^t \sqrt{\theta(\phi_t(y))} dt \end{array}$$

car pour tout $y \in A_\varepsilon \setminus A(\omega)$, $\frac{-[\sum y_j + \omega]_-}{\|[\sum y_j + \omega]_-\|} \cdot (\sum y_j + \omega)$ est négatif ou nul, ce qui interdit par (WSA') la valeur $(1)_j$ comme valeur d'adhérence à $(\frac{-[\sum y_j + \omega]_-}{\|[\sum y_j + \omega]_-\|} \cdot p)_j$, $p \in \cap N_{Y_j}(y_j) \setminus \{0\}$. C'est dire que $\sqrt{\theta(y)}$ est dominée par $\|d\theta(y)\| = \|2 proj_{T_{\prod \partial Y_j}(y(t))}([\sum y_j(t) + \omega]_-, \text{—}, [\sum y_j(t) + \omega]_-)\|$.
θ décroît donc rapidement le long d'une ligne de champ, donc pour tout y dans $A_\varepsilon \setminus A(\omega)$, l'intervalle où $\phi_.(y)$ est définie est minoré. Parce que $\phi_.(y)'$ reste de norme bornée, $\phi_.(y)$ se prolonge en la borne inférieure de l'intervalle où elle est définie (sa valeur en ce point est dans $A(\omega)$).
Le flot ϕ fournit alors une rétraction de A_ε sur $A(\omega)$ ce qui donne l'égalité de leur caractéristique d'Euler-Poincaré. (B') et (WSA') sont donc vraies pour A_ε.

Références

[1] G. Debreu, *Theory of Value*, John Wiley, New York (1959).

[2] J.M. Bonnisseau & B. Cornet, *Existence of Marginal Cost Pricing Equilibria in an Economy with Several Nonconvex Firms*, Econometrica, **58** (1990).

[3] B. Cornet, *Topological Properties of the Set of Attainable Productions Plans in a Nonconvex Production Economy*, Journal of Mathematical Economics, **17** (1988).